TRANSFERENCIA RADIATIVA

Javier Alcolea Jiménez

Observatorio Astronómico Nacional

Javier Bussons Gordo

Universidad de Murcia

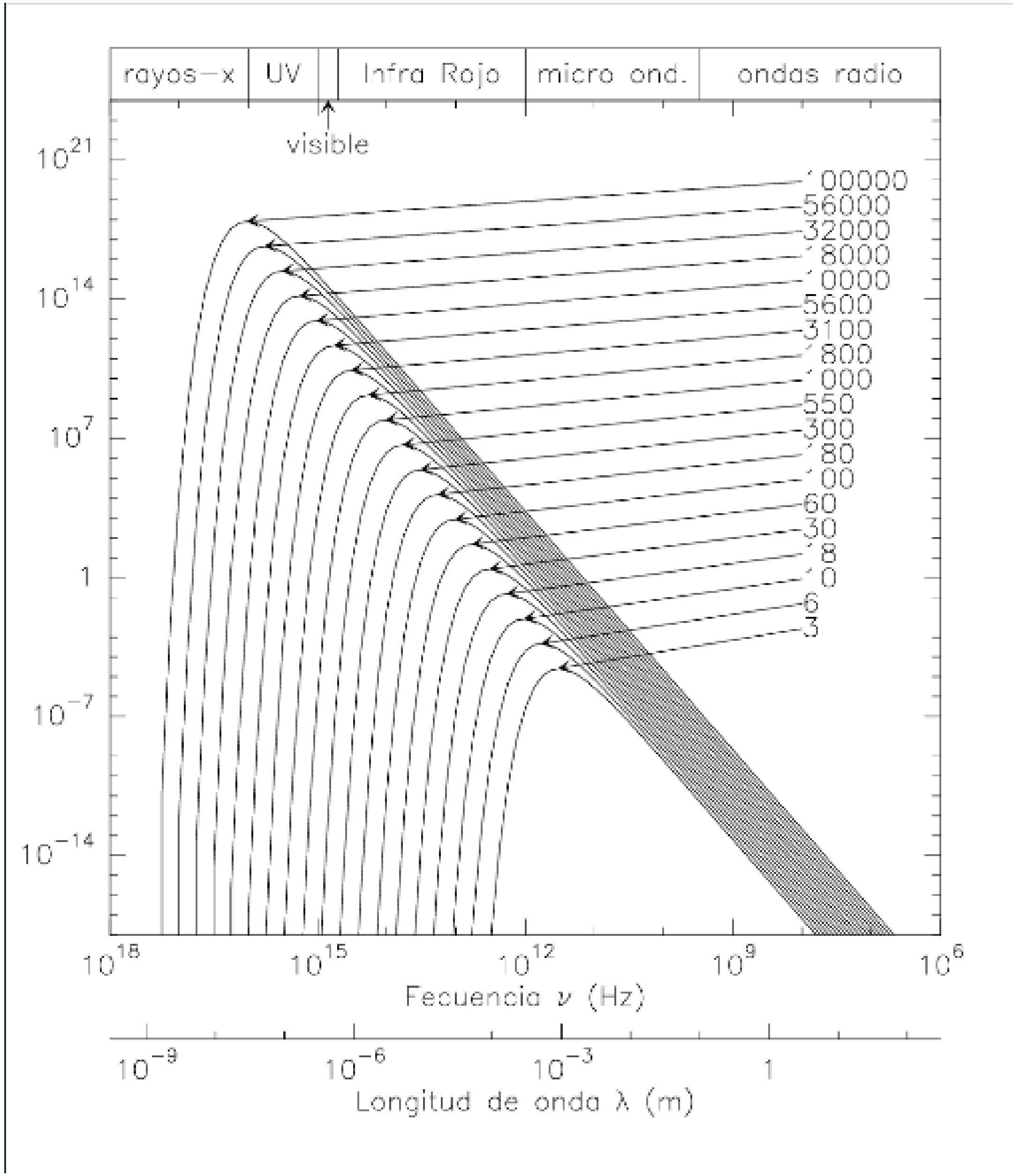
El espectro de radiación del cuerpo negro

- Se define **cuerpo negro** como el emisor perfecto, i.e., aquél en que en equlibrio termodinámico y para una temperatura dada, emite la mayor cantidad de radiación EM a todas las longitudes de onda.
- Evidentemente los cuerpos negros reales no existen (se trata de idealizaciones matemáticas), pero una buena aproximación podría ser una roca volcánica porosa y oscura, o un agujero en una cavidad cuyas paredes estuviesen recubiertas de espejos.
- El espectro de emisión de un **cuerpo negro** a una temperatura **T** viene dado por las ecuaciónes:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \qquad \equiv \qquad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

  donde B_ν y B_λ son la energía radiada por unidad de tiempo, de superficie (del objeto emisor) y de ángulo sólido (unidad de dirección), por unidad de frecuencia (B_ν) o por unidad de longitud de onda (B_λ). El factor 2 en ambas ecuaciones se debe a las dos polarizaciones independientes de la luz (horizontal o vertical, o a derechas o a izquierdas, o los valores ± 1 del espín del fotón), h es la cte. de Plank y c es la velocidad de la luz.
- A estas expresiones se las concoce como la **lay de Plank (de emisión del cuerpo negro)**.

Curvas de emisión de cuerpos negros de igual tamaño pero distinta temperatura. Se han dibujado las curvas correspondientes a las temperaturas de 3K (la radiación de fondo cósmico), 6, 10, 18, 30, 60, 100, 180, 300 (la Tierra), 550, 1000, 1800 (enana marrón), 3100 (estrella de tipo espectral M), 5600 (el Sol), 10 000 (estrella de tipo A), 18 000 (estrella de tipo B), 32 000, 56 000 (estrella de tipo O) y 100 000 grados Kelvin. La intensidad está dada en unidades relativas. Las abscisas se dan tanto en unidades de frecuencia (Hz) como de longitud de onda (m). Puede verse cómo al aumentar la temperatura aumenta la emisión en todo el espectro electromagnético, y cómo los cuerpos fríos son incapaces de emitir fotones muy energéticos (longitudes de onda cortas o frecuencias altas). En la parte superior de la figura se indican los diferentes rangos del espectro electromagnético. Más allá de los rayos-X se sitúan los rayos gamma (reacciones nucleares) y los rayos cósmicos (partículas).



- De la forma del espectro podemos obtener la temperatura del cuerpo negro:

$$\text{máx}(B_\lambda) \equiv \lambda T = 0{,}289 \text{ cm K}$$

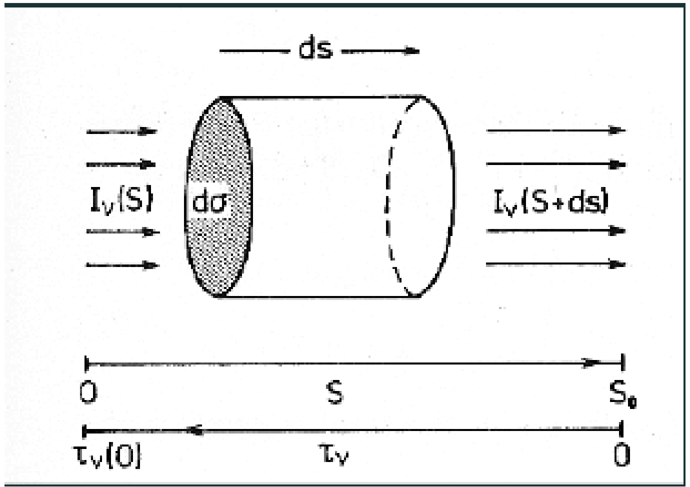
- Un cuerpo negro más caliente emite más energía en todo el espectro electromagnético que un cuerpo negro más frío (de igual tamaño).
- Para una cierta temperatura hay una frecuencia máxima (longitud de onda mínima) por encima (debajo) de la cual una cuerpo negro no emite apenas nada (región de Wien).
- Los cuerpos negros más calientes emiten OEM a frecuencias más altas (longitudes de onda más cortas).
- Integrando a todas las frecuencias/longitudes_de_onda y multiplicando por la superficie del objeto y por los 4π estereo radianes de la esfera completa, obtenemos que la luminosidad total L de un cuerpo negro esférico (de radio R) a temperatura T es:

$$L = 4\pi\sigma R^2 T^4$$

donde σ es la cte. de Stefan-Boltzman, cuyo valor es $5{,}67\,10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.

La ecuación de transferencia radiativa

- En general las OEM no se propagan exclusivamente en el vacío, sino que también atraviesan medios materiales, más o menos difusos (transparentes). Cuando una OEM atraviesa un medio material sufre una disminución de energía por los fotones que son absorbidos por el medio, y un aumento debido a los fotones que el medio emite. Este comportamiento está gobernado por la denominada ecuación de transferencia radiativa.



- Supongamos que un rayo de luz de intensidad I_ν (a la frecuencia ν) llega a un volumen de área dA y longitud dl ($d\sigma$ y ds, respectivamente, en la figura). La intensidad incidente es $I_\nu(l)$, mientras que la intensidad emergente será $I_\nu(l + dl)$. [En este tratamiento vamos a despreciar los efectos de las reflexiones.] La ecuación diferencial que rige el proceso será:

$$\frac{dI_\nu}{dl} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu$$

donde α_ν es el denominado coeficiente de absorción por unidad de longitud y j_ν es la denominada emisividad del medio.

- Para un cuerpo negro en equilibrio termodinámico sabemos que la intensidad de la radiación no puede cambiar, y que además debe ser igual a la ley de Plank de radiación del cuerpo negro, con lo que tenemos:

$$\frac{dI_\nu}{dl} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_\nu I_\nu = j_\nu$$

$$I_\nu = B_\nu(T) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_\nu B_\nu(T) = j_\nu$$

  Esta úlima ecuación es conocida como la **ley de Kirchhoff**.

- Ahora bien, como α_ν y j_ν sólo dependen de las propiedades físicas del medio material, la ley de Kirchhoff debe cumplirse siempre, con independencia de que nuestro sistema esté en equilibrio termodinámico o no (o si se trata de de un cuerpo negro más o menos perfecto).

- Vemos por tanto que existe una relación entre la capacidad de absorber radiación y la emisividad de los cuerpos. Los sistemas perfectamente transparentes no emiten OEM; por el contrario, los sistemas que emiten OEM a una determinada longitud de onda no pueden ser perfectamente transparentes a esa longitud de onda. Ahora bien, la ley de Kirchhoff no impide que un cuerpo sea trasparente la una frecuencia y emita OEM a otra diferente.

- Si definimos ahora la opacidad τ_ν como una magnitud física cuya derivada total, respecto de la dirección en la que avanza la OEM, es el coeficiente de absorción cambiado de signo ($-\alpha_\nu$), tenemos que

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dl \qquad \equiv \qquad \tau_\nu(l) = -\int_0^l \alpha_\nu ds = \int_l^0 \alpha_\nu dl$$

con lo que la ecuación de transferencia radiativa puede reescribirse de la forma:

$$-\frac{1}{\alpha_\nu}\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu(T)$$

donde $S_\nu(T)$ es la denominada función fuente (igual a $B_\nu(T)$ en el caso de un cuerpo negro). Esta ecuación tiene como solución

$$I_\nu(l) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu(l)} + \int_0^{\tau_\nu(l)} S_\nu(T)\, d\tau_\nu$$

- Si $S_\nu(T)$ es constante (y por lo tanto independiente de $\tau_\nu(l)$ y de l), podemos integrar la ecuación imediatamente, resultando la conocida versión simplificada de la ecuación de transferencia radiativa:

$$I_\nu(l) = I_\nu(0)\, e^{-\tau_\nu(l)} + S_\nu(T)\,(1 - e^{-\tau_\nu(l)})$$

la radiación emergente es igual a la radiación incidente atenuada por la opacidad del medio en un factor $e^{-\tau_\nu(l)}$, más la función fuente $S_\nu(T(\nu))$ del medio multiplicada por uno menos la atenuación de la opacidad.

El espectro de radiación del cuerpo gris

- Para que se cumpla la ley de radiación del cuerpo negro de Plank, vemos que es necesario que la opacidad del cuerpo negro sea muy grande a todas las longitudes de onda. En ese supuesto, y si el sistema está en equilibrio termodinámico, tendremos que:

$$\tau_\nu(l) \rightarrow \text{ínf} \qquad \Longrightarrow \qquad I_\nu(l) = S_\nu(T) = B_\nu(T)$$

- En general los sistemas no son perfectamente opacos a todas las longitudes de onda, por lo que se suele hablar también del espectro de radiación del cuerpo gris.

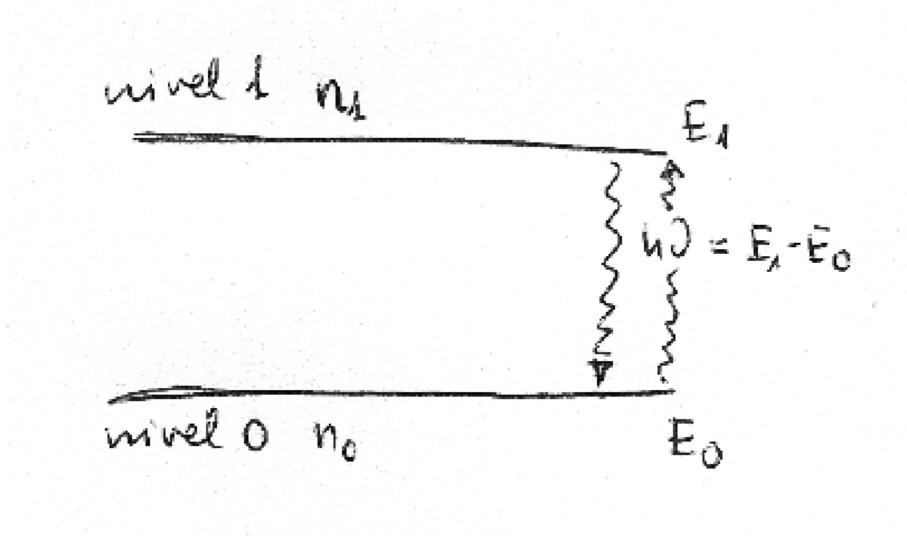
- Hemos de recordar también que para simplificar el formalismo, estamos despreciando los efectos de la reflexión y dispersión de las OEM (i.e. el *scattering*), muy importantes en casos como el de una envoltura de granos de polvo alrededor de una estrella.

Líneas en emisión y en absorción

Hasta ahora sólo hemos visto casos en los que los sistemas emitían a todas las longitudes de onda (en mayor o menor medida): se ha tratado de espectros de radiación en el continuo. La emisión en el continuo suele deberse a sistemas macroscópicos (granos de polvo, planetas, estellas) o a plasmas (gases de partículas cargadas libres).

Por el contrario, los sistemas más sencillos, átomos, iones, moléculas, sólo son capaces de emitir OEM a unas frecuencias determinadas. Como ya adelantamos, esto es debido a que los niveles de energía en este tipo de sistemas están cuantizados, i.e. tienen unos valores discretos. Al emitirse un solo fotón cuando uno de estos sistemas cambia su estado de energía, estos fotones sólo pueden tener valores de frecuencia que se correspondan con los saltos de energía posibles para el sistema.

Como ejemplo vamos a estudiar el caso idealizado de un sistema de partículas en las que cada una de ellas sólo puede estar en dos estados diferentes de energía E_0 y E_1. E_0 será el estado de mínima energía, con energía nula, y E_1 será un estado excitado con energía E_1 por encima del fundamental (ver la figura).



Las transiciones entre los dos niveles de energía sólo pueden producirse por fenómenos EM o por colisiones entre las partículas. En un situación de equilibrio, las poblaciones de ambos niveles deben ser estacionarias, es decir el número de desexcitaciones (partículas que pasan del nivel 1 al 0) por segundo y por unidad de volumen debe ser igual al número de excitaciones (partículas que pasan del 0 al 1). Por lo tanto, debe cumplirse la igualdad:

$$n_1 \frac{1}{4\pi} A + n_1 \frac{I_{\nu_{10}}}{4\pi} B_\downarrow + n_1 C_\downarrow = n_0 \frac{I_{\nu_{10}}}{4\pi} B_\uparrow + n_0 C_\uparrow$$

donde n_0 y n_1 son respectivamente las poblaciones de los niveles inferior y superior (número de partículas en ese estado por unidad de volumen). $I_{\nu_{10}}$ es la intensidad de radiación a la frecuencia de la transición ($h\nu_{10} = E_1 - E_0$). A, $B_\downarrow$ y $B_\uparrow$ son los coeficeintes de Einstein de desexcitación espontánea, desexcitación inducida y excitación inducida respectivamente. Y $C_\downarrow$ y $C_\uparrow$ son los coeficientes colisionales descendente y ascendente respectivamente.

- El término $n_1 \frac{1}{4\pi} A$ representa la tasa de desexcitaciones radiativas que se producen espontáneamente del nivel superior al inferior, emitiendose un fotón a la correspondiente frecuencia;
- $n_1 \frac{I_{\nu_{10}}}{4\pi} B_\downarrow$ representa las desexcitaciones inducidas al llegar un fotón a la correspondiente frecuencia (se emiten el fotón incidente más uno adicional de la mismas características);
- $n_1 C_\downarrow$ representa las desexcitaciones debidas a las colisiones entre partículas (no se emite ningún fotón, la energía liberada se invierte en aumentar la velocidad de las partículas que colisionan);

- $n_0 \frac{I_{\nu_{10}}}{4\pi} B_{\uparrow}$ representa las excitaciones radiativas, lo que resulta en fotones que son absorbidos por el sistema al pasar una partícula del nivel inferior al superior;
- y finalmente, el término $n_0 C_{\uparrow}$ es la tasa de excitaciones colisionales (que enfrían el sistema).

Obviamente, si el sistema no está en equilibrio tendremos que la tasa de aumento de la densidad de fotones $\rho_{\nu_{10}}$ será:

$$\frac{d}{dt}\rho_{\nu_{10}} = n_1 \frac{1}{4\pi} A + n_1 \frac{I_{\nu_{10}}}{4\pi} B_{\downarrow} - n_0 \frac{I_{\nu_{10}}}{4\pi} B_{\uparrow}$$

Si ahora hacemos uso de que $I_{\nu_{10}} = \rho_{\nu_{10}} h\nu_{10} c$, y comparando la expresión anterior con la ecuación de transferencia radiativa, obtenemos que:

$$j_{\nu_{10}} = \frac{h\nu_{10}}{4\pi} n_1 A \quad ; \quad \alpha_{\nu_{10}} = \frac{h\nu_{10}}{4\pi} (n_0 B_{\uparrow} - n_1 B_{\downarrow})$$

Supongamos ahora que el sistema además de estacionario está en equilibrio termodinámico. En estas condiciones $\frac{d}{dt}\rho_{\nu_{10}} = 0$, y la poblacion de ambos niveles estará dada por la ley de Boltzmann:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{E_1 - E_0}{kT}}$$

donde g_1 y g_0 son las denominadas multiplicidades de los niveles (que dependen de la degeneración del nivel) y T es la temperatura del sistema (obviamente $E_1 - E_0 = E_1 = h\nu_{10}$)

con lo que obtenemos finalmente.

$$\alpha_{\nu_{10}} = \frac{c^2}{8\pi\nu_{10}^2} A(n_0 \frac{g_1}{g_0} - n_1)$$

es decir que los coeficeintes A y Bs de Einstein no son independientes. Como estos coeficientes no dependen de las condiciones de equilibrio o no del sistema, la relación anterior debe darse en cualquier caso, por lo que basta especificar el valor de A de una determinada transición para determinar completamente las propiedades ópticas del sistema a esa frecuencia. Podemos comprobar además que en el caso de líneas espectrales, la función fuente $S_\nu(T)$ viene dada por el valor de la ley de Plank para $T = T_{\text{ex}}$, donde la temperatura de excitación de la línea T_{ex} se definide como:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{E_1 - E_0}{kT_{\text{ex}}}}$$

Por el contrario en el caso de que las (dex)escitaciones radiativas sean muy poco probables ($A = 0$), tendremos que en equilibrio termodinamico debe cumplirse:

$$\frac{C_\uparrow}{C_\downarrow} = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{E_1 - E_0}{kT_{\text{cin}}}}$$

donde T_{cin} es la temperatura cinética del sistema. Nuevamente, el valor de los coeficientes colisionales no puede depender que que el sistema este en equilibrio o no, con lo que la relación anterior, que conoce por el principio de microreversibilidad, debe mantenerse siempre.

- Supongamos ahora que tenemos nuestro sistema de dos niveles interponiendose entre nosotros y por ejemplo la radiación de **Fondo Cósmico, T_{bg}=2,7 K**. Supongamos además que la frecuencia de la transición es baja, de forma que podemos aplicar la aproximación de Rayleigh-Jeans, i.e. $h\nu \ll kT$ para todas las temperaturas que intervienen en el proceso. En este caso, la ecuación de transferecia radiativa puede expresarse de la forma:

$$I_{\nu_{10}} = \frac{2\nu^2 k T_{\mathsf{bg}}}{c^2} e^{-\tau_{10}} + \frac{2\nu^2 k T_{\mathsf{ex}}}{c^2}(1 - e^{-\tau_{10}})$$

Introduciendo ahora la Temperatura de Brillo de una radiación, T_{br}, como la temperatura del cuerpo negro equivalente que produciría el mismo flujo de fotones a esa determinada frecuencia, podemos emilinar términos comunes, con lo que obtenemos:

$$T_{\mathsf{br}} = T_{\mathsf{bg}} e^{-\tau_{10}} + T_{\mathsf{ex}}(1 - e^{-\tau_{10}})$$

Mientras que fuera de la línea, como la opacidad del sistema es nula, tendremos:

$$T'_{\mathsf{br}} = T_{\mathsf{bg}}$$

Si restamos una de otra, obtendremos el incremeto o disminución del flujo de fotones debido a la presencia de nuestro sistema:

$$T_{\mathsf{br}} - T'_{\mathsf{br}} = (T_{\mathsf{ex}} - T_{\mathsf{bg}})(1 - e^{-\tau_{10}})$$

- Como vemos, si $T_{\text{ex}} > T_{\text{bg}}$ tendremos una **línea en emision** (su temperatura de brillo es mayor que la del continuo), mientras que si $T_{\text{ex}} < T_{\text{bg}}$ tendremos una **línea en absorción**.

- Así planteado parecería que las líneas espectrales deberían ser infinitamente estrechas (pues absorberían fotones únicamente a la frecuencia exacta de la línea). Esto no es así pues las líneas tienen una determinada anchura y forma debido a: la anchura natural de la línea, al ensachamiento por presión (colisiones) y a la dispersión en velocidades del medio, que debido al efecto Doppler, produce un corrimiento en frecuencias (o longitudes de onda), que en primera aproximación está dado por:

$$\Delta\nu = \nu - \nu_{10} = -\nu_{10}\frac{\Delta v}{c} \qquad ; \qquad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_{10} = \lambda_{10}\frac{\Delta v}{c}$$

donde Δv es la velocidad del gas respecto del observador (positiva si se aleja y negativa si se acerca).

- Esta forma de las líneas se describe en general por una función $\phi(\Delta\nu)$ que nos da la densidad de partículas por unidad de volumen y por unidad de desplazamiento en frecuencia. Introduciendo esa notación en las anteriores ecuaciones, tenemos que sustuir las poblaciones n_0 y n_1 por $n_0\,\phi(\Delta\nu)$, $n_1\,\phi(\Delta\nu)$. De esta forma la ecuación de la temeperatura de brillo en función de la frecuencia será:

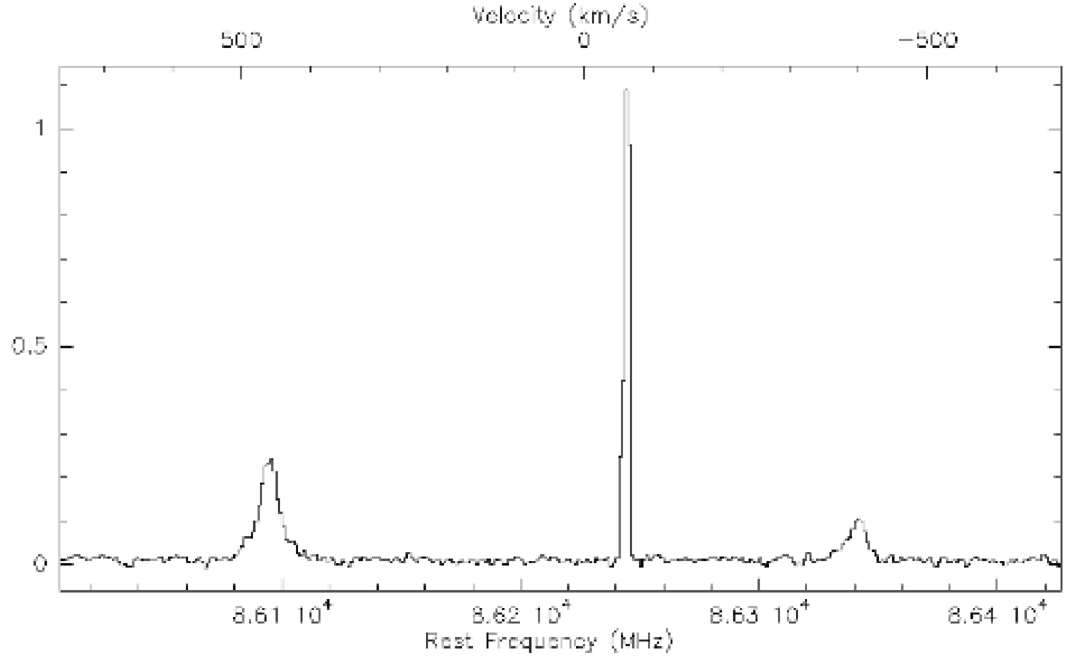
$$T_{\text{br}}(\nu) = T_{\text{bg}}e^{-\tau_{10}(\Delta\nu)} + T_{\text{ex}}(1 - e^{-\tau_{10}(\Delta\nu)})$$

- En un caso **ópticamente delgado**, i.e. para $\tau \ll 1$, tendremos:

$$T_{\mathsf{br}}(\nu) = T_{\mathsf{bg}}(1 - \tau_{10}(\Delta\nu)) + T_{\mathsf{ex}}\tau_{10}(\Delta\nu) = T_{\mathsf{bg}} + (T_{\mathsf{ex}} - T_{\mathsf{bg}})(1 - \tau_{10}(\Delta\nu))$$

$$T_{\mathsf{br}}(\nu) - T_{\mathsf{bg}} = (T_{\mathsf{ex}} - T_{\mathsf{bg}})(1 - \tau_{10}(\Delta\nu))$$

la diferencia de temperatura de brillo debida a la presencia de la línea espectral es proporcional a la diferencia de temperaturas de excitación y de fondo, y a la opacidad de la línea a cada frecuencia; que a su vez es porporcional al número de particulas por unidad de volumen (integradas a lo largo de la trayectoria de las OEM) que absorben/emiten radiación a esa particular frecuencia.



Porción del espectro de ondas radio de una estrella en el que se pueden apreciar tres líneas espectrales en emisión.