HOJA 1: Repaso de integral de Lebesgue

1. Se define la *medida exterior de Lebesgue* de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}(E) = \text{ínf}\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \text{long } (I_k) \ : \ E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad I_k \ \text{ intervalos } \Big\}.$$

Demostrar a partir de la definición que:

(i) $\mathcal{L}$ es una "medida exterior", es decir, $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$ y

$$A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(A_n).$$

(ii)* Probar que para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se tiene $\mathcal{L}(I) = \text{long } (I)$.

(iii) Para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\mathcal{L}(E + a) = \mathcal{L}(E) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}(aE) = |a|\mathcal{L}(E).$$

(iv) Si E es numerable, entonces $\mathcal{L}(E) = 0$.

2. Considerar las correspondencias que a cada $E \subset \mathbb{R}$ le asignan

$$\begin{aligned} c_{\text{ext}}(E) &= \text{ínf}\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \text{long } (I_k) \ : \ E \subset \cup_{k=1}^{n} I_k, \quad I_k \ \text{ intervalos }, \ n = 1, 2, 3 \ldots \Big\} \\ c_{\text{int}}(E) &= \text{ínf}\Big\{ \sum_{k=1}^{n} \text{long } (J_k) \ : \ E \supset \uplus_{k=1}^{n} J_k, \quad J_k \ \text{ intervalos disjuntos }, \ n = 1, 2, 3 \ldots \Big\} \end{aligned}$$

(se suelen denominar *contenido exterior e interior de Jordan de* E).

(i) Probar que $c_{\text{ext}}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$, y de modo más general que $c_{\text{ext}}(E) = c_{\text{ext}}(\overline{E})$, donde $\overline{E}$ = clausura de E.

(ii) ¿Cuáles de las propiedades (i)-(iv) del ejercicio anterior se cumplen con "c_{ext}" en lugar de "$\mathcal{L}$"?

(iii) Probar que $c_{int}(E) \le \mathcal{L}_{\text{int}}(E) \le \mathcal{L}_{\text{ext}}(E) \le c_{\text{ext}}(E)$, para todo $E \subset [0, 1]$.

3. Una medida exterior abstracta en X es una correspondencia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ que cumple (i) del ejercicio 1 (con μ en lugar de $\mathcal{L}$). Comprobar con un ejemplo sencillo que las medidas exteriores no necesariamente verifican la propiedad $\mu(A_1 \uplus A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Sugerencia: construir una medida exterior apropiada en $X = \{a, b, c\}$.

4. Mostrar con un ejemplo en $\mathbb{R}$ que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ con $|A_1| = \infty$ no necesariamente implica $\text{lím}_{n\to\infty} |A_n| = | \cap_{n=1}^{\infty} A_n|$.

5. Demostrar que $\text{lím}_{n\to\infty} \mathcal{L}(E_n) = \mathcal{L}(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$ si $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \ldots$ son conjuntos *arbitrarios* de $\mathbb{R}$ (no necesariamente medibles Lebesgue).

Sugerencia: encontrar una familia creciente de borelianos $B_n \supset E_n$ con $\mathcal{L}(B_n) = \mathcal{L}(E_n)$; [Evans-Gariepy, p. 5].

6. Sea $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Usar el teorema de la convergencia monótona para demostrar

$$\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu \,.$$

7. Supongamos que $\mu(X) < \infty$ y sean $f_n : X \mapsto \mathbb{C}$ funciones medibles acotadas. Probar que si $f_n \longrightarrow f$ *uniformemente*, se tiene

$$\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$$

Mostrar con un ejemplo que la hipótesis $\mu(X) < \infty$ es esencial.

8. Probar que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es continua y $f(x) = 0$ a.e. con respecto a la medida de Lebesgue entonces $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

9. Calcular los límites, cuando $n \to \infty$, de :

$$a) \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^x \, dx \,, \qquad b) \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{-x} \, dx \,, \qquad c) \int_0^n (1 - \frac{x}{2n})^n e^x \, dx \,, \qquad d) \int_a^{\infty} \frac{n^2 x \, e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2} \, dx$$

10. Construir una función $f \in L^1(0, 1)$ tal que no esté acotada en ningún intervalo $(a, b) \subset (0, 1)$.

    Sugerencia: ver [Folland, p. 59]

Opcionales

11. Probar que si f es medible y *acotada superiormente*, entonces existen funciones simples $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq f$ tales que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$. ¿Es cierta esta propiedad si f no es acotada?

12. Suponer $\mu(X) < \infty$. Demostrar que se tiene la siguiente versión del TCM: si f_n es una sucesión *decreciente* de funciones medibles positivas *acotadas superiormente*, ie $M \geq f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \;=\; \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

    ¿Es cierta la propiedad si $\mu(X) = \infty$?

13. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ acotada y positiva (no suponemos que sea medible). Definimos

$$\begin{aligned} \overline{\int}_{[0,1]} f \quad &= \quad \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} M_k \, |E_k| \;:\; \{E_k\}_{k=1}^{n} \text{ partición medible de } [0,1] \right\} \\ \underline{\int}_{[0,1]} f \quad &= \quad \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} m_k \, |E_k| \;:\; \{E_k\}_{k=1}^{n} \text{ partición medible de } [0,1] \right\} \end{aligned}$$

    donde $m_k = \inf_{E_k} f$ y $M_k = \sup_{E_k} f$. Probar que son equivalentes

    (i) f es medible

    (ii) $\overline{\int}_{[0,1]} f \;=\; \underline{\int}_{[0,1]} f$.

    (iii) f es integrable Lebesgue