ANÁLISIS DE FOURIER. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2011/12*

HOJA 2 DE PROBLEMAS: Espacios L^p

1. Probar que la desigualdad de Hölder $\int |fg|\, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$ es una igualdad si y sólo si $|f|^p = \lambda |g|^q$ ctp, para alguna constante $\lambda > 0$.

2. (i) Demostrar que para todo $a, b \ge 0$ se tiene

$$(a+b)^\alpha \quad \le \quad a^\alpha + b^\alpha, \quad \text{si } \alpha \in (0,1]$$

(ii) Deducir justificadamente una desigualdad para $\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right)^\alpha$, si $a_n \ge 0$.

(iii) Si $r < p$, demostrar que $\ell^r \subset \ell^p$ y $\|\{a_n\}\|_{\ell^p} \le \|\{a_n\}\|_{\ell^r}$.

(iv) Encontrar una sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$ que no pertenezca a ℓ^r para ningún $r < p$.

3. (a) Probar que si $p \ne r$ entonces $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^r(\mathbb{R})$.

(b) Mostrar con un ejemplo que $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ no necesariamente implica $f \cdot g \in L^p(\mathbb{R})$.

(c) Probar que $f \in L^p(\mathbb{R})$ no necesariamente implica $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. Demostrar la *desigualdad integral de Minkowski*: si (X, μ), (Y, ν) son espacios de medida (σ-finitos), $1 \le p < \infty$ y $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ es medible, entonces

$$\Big\| \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) \Big\|_{L^p(\mu)} \le \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)}\, d\nu(y).$$

Sugerencia: Proceder como en la prueba de la desigualdad triangular, suponiendo primero que el término de la izquierda es finito. En general, aproximar con $f\chi_{K_m}$, para una sucesión creciente de conjuntos donde f es acotada.

5. Sean $1 \le p, q \le \infty$ exponentes conjugados. Si $f_n \to f$ en la norma de $L^p(\mu)$ y $g_n \to g$ en la norma de $L^q(\mu)$, demostrar que $f_n\, g_n \to f\, g$ en la norma de $L^1(\mu)$.

6. Probar por inducción la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: dados $1 < p_1, p_2, \ldots, p_n < \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_i \in L^{p_i}(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se cumple

$$\left| \int_X f_1\, f_2\, \ldots f_n\, d\mu \right| \le \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_n\|_{p_n}\,.$$

7. Demostrar que si $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ y $r \in (p_0, p_1)$, entonces $f \in L^r$ y se tiene la desigualdad

$$\|f\|_{L^r} \le \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta},$$

donde $\theta \in (0,1)$ queda definido por $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

8. *a*) Suponiendo $\mu(X) = 1$ y $f \in L^\infty(\mu)$, demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
   b) Demostrar el mismo resultado que en el apartado anterior pero suponiendo que $\mu(X) < \infty$.
   c) Suponiendo $\mu(X) < \infty$ y $f \in L^q(X)$ para algún $q > 1$, demostrar que $\lim_{p\to 1} \|f\|_p = \|f\|_1$.

9. En $[0,1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$ con $j = 1, 2, \ldots 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p[0,1)$ con $1 \le p < \infty$, y

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(y)\, dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x)\,,$$

demostrar:

(a) $\|f_k\|_p \le \|f\|_p$.

(b) Si $f \in C_c(0,1)$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$.

(c) Si $f \in L^p(0,1)$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$ (usar que $C_c(0,1)$ es denso en $L^p(0,1)$).

10. (a) Utiliza la desigualdad de Jensen para dar una prueba directa de la desigualdad

$$\|h\|_{L^{p_1}(X,\nu)} \leq \nu(X)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|h\|_{L^{p_2}(X,\nu)} \quad \text{si } 1 \leq p_1 < p_2 < \infty.$$

(b) Utiliza el apartado anterior para obtener una nueva demostración de la desigualdad de Hölder.

Sugerencia: En (b) escribir $\int_X fg\,d\mu = \int_{X'} h(x)\,d\nu(x)$ con $d\nu = g^q d\mu$ y $X' = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, y usar la inclusión $L^p(\nu) \hookrightarrow L^1(\nu)$ del apartado (a).

Opcionales

11. Espacios $L^p(X)$ con $0 < p < 1$.

(i) Demostrar que $d_p(f,g) := \int_X |f-g|^p\,d\mu$ es una "distancia", ie satisface la desigualdad triangular

$$d_p(f,g) \leq d_p(f,h) + d_p(h,g), \quad \forall\, f,g,h \in L^p.$$

(ii) Probar que, aunque $\|f\|_p$ no es una "norma", se tiene

$$\|f+g\|_{L^p} \leq c_p\big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\big), \quad f,g \in L^p,$$

con $c_p = 2^{\frac{1}{p}-1}$, mostrando con un ejemplo que la igualdad puede darse.

Sugerencia: En (ii), razonando por convexidad ver que $(a+b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$ cuando $\alpha \in [1,\infty)$.

12. Si $0 < p < 1$ y $f_n \in L^p(X)$, $n = 1,2,3,\ldots$, adaptar los teoremas vistos en clase para probar

(a) Si $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p^p < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge en ctp $x \in X$ y en la métrica de L^p.

(b) Si $f_n \to f$ en la métrica de L^p, entonces existe una subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x)$ en ctp $x \in X$.

(c) $L^p(X)$ es un espacio métrico completo.

13. Probar que $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio topológico separable si $0 < p < \infty$.

Sugerencia: $\{\sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{(a_j,b_j)} : \lambda_j, a_j, b_j \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ es numerable y denso en L^p.

14. Probar que ℓ^∞ no es separable. ¿Es separable $L^\infty(\mathbb{R})$?

Sugerencia: el conjunto $\mathcal{E} = \{(a_k) : a_k = 0 \text{ ó } 1\}$ es no numerable y cumple $\|a-b\|_{\ell^\infty} = 1$, $\forall\, a \neq b \in \mathcal{E}$.