

HOJA 1: Repaso de integral de Lebesgue

1. Se define la *medida exterior de Lebesgue* de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad I_j \text{ intervalos} \right\}.$$

Demostrar las siguientes propiedades:

- (i) La definición no cambia si suponemos que I_j son intervalos abiertos (o cerrados).
- (ii) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple $\mathcal{L}(E + a) = \mathcal{L}(E)$ y $\mathcal{L}(aE) = |a|\mathcal{L}(E)$.
- (iii) Si $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \mathcal{L}(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}(E_n)$.
- (iv) Si E es numerable, entonces $\mathcal{L}(E) = 0$.
- (v) Si I = intervalo entonces $\mathcal{L}(I) = |I|$.

Sugerencia: En (v) puedes usar las propiedades de intervalos en el ejercicio opcional 16.

2. Considerar las correspondencias que a cada $E \subset [0, 1]$ le asignan

$$c_{\text{ext}}(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |I_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^n I_k, \quad I_k \text{ intervalos}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

$$c_{\text{int}}(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n |J_k| : E \supset \bigcup_{k=1}^n J_k, \quad J_k \text{ intervalos disjuntos}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

(se suelen denominar *contenido exterior e interior de Jordan de E*).

- (i) Probar que $c_{\text{ext}}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$, y en general que $c_{\text{ext}}(E) = c_{\text{ext}}(\overline{E})$, donde $\overline{E}$ = clausura de E .
 - (ii) ¿Cuáles de las propiedades (i)-(v) del ejercicio anterior se cumplen con “ c_{ext} ” en lugar de “ $\mathcal{L}$ ”?
 - (iii) Probar que $c_{\text{int}}(E) \leq \mathcal{L}_{\text{int}}(E) \leq \mathcal{L}_{\text{ext}}(E) \leq c_{\text{ext}}(E)$, para todo $E \subset [0, 1]$.
3. (i) Probar que si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$ son medibles con $\mu(A_1) < \infty$, entonces se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

- (ii) Mostrar con un ejemplo que la propiedad falla si $\mu(A_1) = \infty$.

4. Probar a partir de la definición

- a) si f_n son medibles, entonces $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ y $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ son medibles.
- b) si f, g medibles, entonces $f + g$ es medible.

Sugerencia: puedes usar que f es medible sii $f^{-1}((a, \infty])$ es medible.

5. Probar las siguientes propiedades a partir de los resultados demostrados en clase (ie, el TCM y el lema de aproximación por funciones simples):

- (i) si f_n son medibles positivas entonces $\int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.
- (ii) si $f \geq 0$ medible, entonces $\int f d\mu = 0$ si y sólo si $f = 0$ μ -ctp.
- (iii) si $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, entonces $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.

6. Probar que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y $f = f_1 - f_2$ con $f_1, f_2 \geq 0$, entonces necesariamente $f_1 \geq f^+$ y $f_2 \geq f^-$. Deducir que para funciones integrables **reales** f, g se cumple $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
7. Probar que si f es medible y *acotada superiormente*, entonces existen funciones simples $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq f$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. ¿Es cierta esta propiedad si f no es acotada?

8. Demostrar que se tiene la siguiente versión del TCM: si f_n es una sucesión *decreciente* de funciones medibles positivas $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq 0$ tales que $\int_X f_1 d\mu < \infty$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

¿Es cierta la propiedad si quitamos la hipótesis sobre f_1 ?

9. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y positiva (no suponemos que sea medible). Definimos

$$\begin{aligned} \overline{\int}_{[0,1]} f &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^n M_k |E_k| : \{E_k\}_{k=1}^n \text{ partición medible de } [0, 1] \right\} \\ \underline{\int}_{[0,1]} f &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n m_k |E_k| : \{E_k\}_{k=1}^n \text{ partición medible de } [0, 1] \right\} \end{aligned}$$

donde $m_k = \inf_{E_k} f$ y $M_k = \sup_{E_k} f$. Probar que son equivalentes

(i) f es medible

(ii) $\overline{\int}_{[0,1]} f = \underline{\int}_{[0,1]} f$.

(iii) f es integrable Lebesgue

10. Demostrar que para f_n medibles se cumple $\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$ (†)

(i) cuando f_n son positivas

(ii) cuando f_n son reales o complejas, y se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$.

(iii) Encuentra un ejemplo en que no se cumpla (†).

11. Suponer $\mu(X) < \infty$, y sean $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles acotadas. Probar que si $f_n \rightarrow f$ *uniformemente*, entonces

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$$

Mostrar con un ejemplo que la hipótesis $\mu(X) < \infty$ es esencial.

12. Probar que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es continua y $f(x) = 0$ ctp con respecto a la medida de Lebesgue entonces $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

13. Calcular los siguientes límites de integrales cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} a) \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{-x} dx & \quad b) \int_0^n (1 - \frac{x}{2n})^n e^x dx & \quad c) \int_a^\infty \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{n e^{ix} dx}{(n e^{ix})^2 + 1} & \quad (e) \int_0^\infty \frac{n \sin(x/n)}{x(1 + x^2)} dx & \quad (f) \frac{1}{n} \int_0^n \left[\int_0^\infty e^{-y^2} \cos(xy) dy \right] dx. \end{aligned}$$

14. Sea $f(x)$ la función definida en $(0, 1)$ mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = [\frac{1}{x}]$ si x es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular la integral de Lebesgue $\int_{(0,1)} f dx$.

15. Sea f_n funciones medibles positivas tales que $f_n \leq h \in L^1(\mu)$.

a) Demuestra que se cumple la desigualdad reversa de Fatou

$$\limsup \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup f_n d\mu.$$

b) Encuentra un ejemplo de f_n en $X = [0, 1]$, con la medida de Lebesgue, tal que

$$\int \liminf f_n dx < \liminf \int f_n dx < \limsup \int f_n dx \leq \int \limsup f_n dx.$$

16. Propiedades básicas de los intervalos

Llamamos *intervalo elemental* en $\mathbb{R}$ a un conjunto I de la forma

$$(a, b), \quad [a, b], \quad (a, b], \quad [a, b), \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

y denotamos $|I| = b - a$. En particular, los intervalos elementales son siempre finitos, pudiendo ser abiertos o cerrados en cualquiera de sus extremos. Como casos especiales tenemos los conjuntos unipuntuales, y el conjunto vacío:

$$[a, a] = \{a\}, \quad (a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset.$$

Llamamos *conjuntos elementales* en $\mathbb{R}$ a las uniones finitas de intervalos:

$$\mathcal{E} = \left\{ \bigcup_{j=1}^n I_j : n \in \mathbb{N}, I_1, \dots, I_n \text{ intervalos} \right\}.$$

a) Cada $E = \bigcup_{j=1}^n I_j \in \mathcal{E}$ se puede escribir como unión **disjunta** de intervalos

$$E = \bigcup_{j=1}^n I_j = \bigsqcup_{\ell=1}^L J_\ell$$

Sugerencia: Ordena los extremos de todos los intervalos I_j de la forma $c_0 < c_1 < \dots < c_m$ (quitando las posibles repeticiones). Define la nueva familia de intervalos

$$\mathcal{J} = \left\{ (c_0, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{m-1}, c_m) \right\} \cup \left\{ [c_0, c_0], [c_1, c_1], \dots, [c_m, c_m] \right\}.$$

Los intervalos que conforman $\mathcal{J}$ son disjuntos dos a dos. Selecciona ahora aquéllos $J \in \mathcal{J}$ que tocan al conjunto E y demuestra que E es la unión de dichos intervalos.

b) Si $E = \bigsqcup_{\ell=1}^L J_\ell \in \mathcal{E}$, definimos

$$|E| := \sum_{\ell=1}^L |J_\ell|.$$

Demuestra que esta definición no depende de los intervalos J_ℓ elegidos.

Sugerencia: dadas dos particiones por intervalos disjuntos, razona como en la prueba de (a) para encontrar una partición más fina que las dos anteriores.

c) Si $I \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$, demuestra que $|I| \leq \sum_{n=1}^\infty |I_n|$.

Sugerencia: utiliza un argumento de compacidad para reducir al caso de un recubrimiento finito; para ello, dado $\varepsilon > 0$, debes reemplazar I por $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, e I_n por $(a_n - \varepsilon 2^{-n}, b_n + \varepsilon 2^{-n})$. En el caso de cubrimientos finitos, el resultado sigue de (a), (b).

17. **Conjunto de Vitali.** Consideramos la relación de equivalencia $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Q}$, para $x, y \in [0, 1]$. Definimos $E = [0, 1] / \sim$, escogiendo un único punto de cada clase de equivalencia $[x] = x + \mathbb{Q}$. Consideramos

$$E_n := E + r_n, \quad \text{donde } \{r_1, r_2, \dots\} \text{ es una enumeración de } \mathbb{Q} \cap [-1, 1].$$

Comprobar que

- $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset [-1, 2]$
- los conjuntos E_n son disjuntos dos a dos
- E no es medible Lebesgue
- Si $F \subset E$ es medible, entonces $\mathcal{L}(F) = 0$
- Se cumple $\mathcal{L}(E) > 0$ y $\mathcal{L}([0, 1] \setminus E) = 1$.

Sugerencia: en (c), si E fuera medible, tendríamos $\mathcal{L}(\bigsqcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{L}(E + r_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{L}(E)$, que sólo puede valer 0 ó ∞ ; esto contradice (a). Este razonamiento también vale para (d).

En (e2), supón que $\mathcal{L}([0, 1] \setminus E) < 1$ y encuentra $I_j \subset [0, 1]$ con $[0, 1] \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ y $\sum_{n=1}^\infty |I_n| < 1 - \varepsilon$; deduce la contradicción de la inclusión $[0, 1] \setminus (\bigcup_{n=1}^\infty I_n) \subset E$ y del apartado (d).