

HOJA 2: Espacios L^p

1. Dar una demostración analítica de la desigualdad de Young: si $1 < p, q < \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b > 0.$$

Demuestra que se tiene igualdad si y sólo si $b^q = a^p$.

2. Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Probar que, si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, la desigualdad de Hölder

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

es una igualdad si y sólo si, o bien $f \equiv 0$, o bien $|g|^q = \lambda |f|^p$ ctp, para alguna constante $\lambda \geq 0$.

3. a) Determina cuándo pertenecen a $L^p(0, 1/2)$ las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha [\log(1/x)]^\gamma}, \quad x \in (0, 1/2), \quad \text{con } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}.$$

b) Fijado $1 \leq p < \infty$, encuentra una función $f \in L^p(0, 1/2)$ tal que $f \notin L^r$ para ningún $r > p$.

c) Encuentra una función $f \in \cap_{p \geq 1} L^p(0, 1)$, pero con $f \notin L^\infty$.

4. Determina cuándo pertenecen a $L^p(\mathbb{R}^d)$ las siguientes funciones, donde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha [1 + \log(1/|x|)]^\gamma}$, para $|x| < 1$ (y cero en el resto)

b) $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha (1 - |x|)^\gamma}$, para $|x| < 1$ (y cero en el resto)

c) $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha [1 + \log(|x|)]^\gamma}$, para $|x| > 1$ (y cero en el resto)

5. (a) Probar que si $p_1 \neq p_2$ entonces $L^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subset L^{p_2}(\mathbb{R})$.

(b) Probar que $f \in L^p(\mathbb{R})$ no necesariamente implica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(c) Mostrar con un ejemplo que $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ no necesariamente implica $f \cdot g \in L^p(\mathbb{R})$.

¿Qué podemos decir si $f, g \in \ell^p(\mathbb{N})$?

6. Sea $0 < \alpha \leq 1$.

(i) Demostrar que para todo $a, b \geq 0$ se tiene

$$(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha,$$

(ii) Deducir justificadamente una desigualdad para $(\sum_{n=1}^\infty a_n)^\alpha$, si $a_n \geq 0$.

(iii) Si $p_1 < p_2$, demostrar que $\|\{a_n\}\|_{\ell^{p_2}} \leq \|\{a_n\}\|_{\ell^{p_1}}$, y por tanto $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.

(iv) Encontrar una sucesión $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell^p$ que no pertenezca a ℓ^r para ningún $r < p$.

7. Demostrar la *desigualdad integral de Minkowski*: si $(X, \mu), (Y, \nu)$ son espacios de medida (σ -finitos), $1 \leq p < \infty$ y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ es medible, entonces

$$\left\| \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right\|_{L^p(\mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\mu)} d\nu(y).$$

Sugerencia: La prueba es idéntica a la desigualdad triangular, suponiendo que el término de la **izquierda** es finito. Para obtener el caso general, se puede aproximar con $f \cdot \mathbf{1}_{E_m}$, para una sucesión creciente de conjuntos $E_m \subset X \times Y$ de medida finita donde f sea acotada.

8. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Si $f_n \rightarrow f$ en la norma de $L^p(\mu)$ y $g_n \rightarrow g$ en la norma de $L^q(\mu)$, demostrar que $f_n g_n \rightarrow f g$ en la norma de $L^1(\mu)$.
9. Probar por inducción la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: dados $1 < p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_i \in L^{p_i}(\mu)$, $i = 1, 2, \dots, n$, se cumple

$$\left| \int_X f_1 f_2 \dots f_n d\mu \right| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_n\|_{p_n}.$$

10. Demostrar que si $f \in L^{p_0}$ y $f \in L^{p_1}$, entonces f está en todos los espacios intermedios L^r con $p_0 < r < p_1$. Además, se tiene la desigualdad

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{1-\theta} \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta},$$

donde $\theta \in (0, 1)$ queda definido por $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.

11. Suponer que $\mu(X) < \infty$.

a) Si $f \in L^\infty(\mu)$, demostrar que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

b) Si $f \in L^{p_0}(\mu)$ para algún $p_0 > 1$, demostrar que $\lim_{p \rightarrow 1} \|f\|_p = \|f\|_1$.

12. En $[0, 1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j})$ con $k = 1, 2, \dots, 2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p[0, 1)$ con $1 \leq p < \infty$, definimos

$$f_j(x) := \sum_{k=1}^{2^j} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(y) dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x),$$

demostrar:

(a) $\|f_j\|_p \leq \|f\|_p$.

(b) Si $f \in C_c(0, 1)$, $\|f - f_j\|_p \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$.

(c) Si $f \in L^p(0, 1)$, $\|f - f_j\|_p \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ (usar que $C_c(0, 1)$ es denso en $L^p(0, 1)$).

13. Probar a partir de los resultados vistos en clase que la familia de funciones

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \chi_{(a_j, b_j)} : a_j, b_j \in \mathbb{Q}, c_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es densa en $L^p(\mathbb{R})$ si $1 \leq p < \infty$. Concluye que $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach separable.

14. La *desigualdad de Jensen* afirma que si $\mu(X) = 1$ y $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es convexa, entonces

$$\Phi\left(\int_X |f| d\mu\right) \leq \int_X \Phi(|f|) d\mu.$$

(a) Utiliza Jensen con $\Phi(t) = t^{p_2/p_1}$ para dar una prueba directa de la desigualdad

$$\|h\|_{L^{p_1}(X, \nu)} \leq \nu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|h\|_{L^{p_2}(X, \nu)} \quad \text{si } 1 \leq p_1 < p_2 < \infty.$$

(b) Utiliza el apartado anterior para obtener una nueva demostración de la desigualdad de Hölder.

Sugerencia: En (b) escribir $\int_X f g d\mu = \int_X h(x) d\nu(x)$ con $d\nu = g^q d\mu$ y $X' = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, y usar la inclusión $L^p(\nu) \hookrightarrow L^1(\nu)$ del apartado (a).

15. Si $\mu(X) = 1$, utiliza la desigualdad de Jensen para encontrar (y probar) relaciones entre

$$(a) \int |f| d\mu \text{ vs } e^{\int \log |f| d\mu} \quad (b) \int |f|^{-p} d\mu \text{ vs } \left[\int |f| d\mu \right]^{-p} \quad (c) \int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \text{ vs } \int |f| d\mu \int \frac{d\mu}{1+|f|}.$$

Opcionales

16. Sea $1 < p < \infty$. Probar que la desigualdad triangular

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in L^p,$$

es una igualdad si y sólo si, o bien $f \equiv 0$, o bien $g = \lambda f$ ctp, para algún $\lambda \geq 0$. Probar que esto **no** es cierto si $p = 1$ ó $p = \infty$.

Sugerencia: revisa la prueba y usa el Ejercicio 2. Puedes consultar también *Analysis*, Lieb-Loss, §2.4.

17. Espacios $L^p(X)$ con $0 < p < 1$.

(i) Demostrar que $d_p(f, g) := \int_X |f - g|^p d\mu$ es una “distancia”, ie satisface la desigualdad triangular

$$d_p(f, g) \leq d_p(f, h) + d_p(h, g), \quad \forall f, g, h \in L^p.$$

(ii) Probar que $\|f\|_p$ es una “cuasi-norma”, es decir se tiene

$$\|f + g\|_{L^p} \leq K (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}), \quad f, g \in L^p,$$

para alguna constante $K \geq 1$. Mostrar con un ejemplo que si $K = 2^{\frac{1}{p}-1}$, entonces la igualdad puede darse.

Sugerencia: En (ii), razonando por convexidad, usar que $(a + b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$ cuando $\alpha \in [1, \infty)$.

18. Más sobre $L^p(X)$ con $0 < p < 1$. Probar (adaptando adecuadamente lo visto en clase)

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^p < \infty$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge en ctp $x \in X$ y en la métrica de L^p .

(b) Si $f_n \rightarrow f$ en la métrica de L^p , entonces existe una subsucesión tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_j}(x) = f(x)$ en ctp $x \in X$.

(c) $L^p(X)$ es un espacio métrico completo.