

HOJA 3: Convolución y aproximaciones de la identidad

1. Sea $f(x) = \chi_{[0,1]}(x)$. Calcular explícitamente y esbozar las gráficas de

$$(f * f)(x) \quad \text{y} \quad (f * f * f)(x).$$

2. Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ medibles y $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $(|f| * |g|) * |h|(x) < \infty$; demuestra que

$$(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x).$$

Nota: Debes justificar adecuadamente el uso del teorema de Fubini.

3. Se define $\text{sop} f$ como el complementario del mayor abierto V donde $f|_V = 0$ ctp. Probar que

$$\text{sop}(f * g) \subset \overline{\text{sop} f + \text{sop} g}.$$

¿Es cierta la inclusión recíproca?

4. Completa los detalles de los siguientes resultados esbozados en clase

a) si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $1 \leq p < \infty$ entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f\|_p = 0$

b) si $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$, con $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0.$$

5. *Desigualdad de Young generalizada.* Sean $1 \leq p_1, p_2, r \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{r}$. Demuestra que si $f \in L^{p_1}$ y $g \in L^{p_2}$ entonces $f * g \in L^r$ y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}.$$

Sugerencia: escribir $f * g(x) = \int |f(x-y)|^{1-\frac{p_1}{r}} |g(y)|^{1-\frac{p_2}{r}} h(x,y) dy$, para una función h apropiada, y usar (justificadamente) la desigualdad de Hölder para 3 funciones del Ejercicio 9, Hoja 2.

6. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $R > 0$, denotamos la función dilatada por $f_R(x) = f(x/R)$.

(i) Probar que $\|f_R\|_p = R^{n/p} \|f\|_p$.

(ii) Hallar una expresión para $f_R * g_R$ en términos de la dilatada de $(f * g)$.

(iii) Demostrar que la desigualdad de Young $\|f * g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}$ sólo puede ser cierta para toda $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ cuando los índices satisfacen $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r} + 1$.

Sugerencia: En (iii), usar (i)+(ii), y hacer tender R a 0 ó ∞ .

7. a) Dadas $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con f continua y $g \in C^1$. Demostrar que, si extendemos las funciones a $\mathbb{R}$, siendo nulas en $(-\infty, 0)$, entonces se tiene

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s) ds \quad \text{y} \quad (f * g)'(t) = f(t)g(0) + f * (g')(t), \quad t > 0.$$

b) Demuestra que $x(t) = (f * e^{-\alpha \cdot})(t)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0.$$

c) Trata de escribir como convolución la solución de la EDO

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Sugerencia: en c) la expresión final debería ser del tipo $x(t) = f * e^{\alpha_1 \cdot} * e^{\alpha_2 \cdot}$, para α_1, α_2 raíces de $z^2 + az + b = 0$, donde se entiende que las funciones están extendidas a $\mathbb{R}$ siendo nulas en $(-\infty, 0)$.

8. Sea $\{\varphi_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad regular, y $f(x)$ una función acotada en $\mathbb{R}^d$.
- (a) Si f es continua en el punto a , entonces $\varphi_t * f(a) \rightarrow f(a)$.
- (b) Si $f \in C(U)$, U abierto, entonces $\varphi_t * f(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente sobre compactos de U .
9. Si $f \in C(\mathbb{R}^d)$ y $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, demuestra que f es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^d$. Deduce que si $\{\varphi_t\}_{t>0}$ una AIR, entonces se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t * f(x) = f(x) \quad \text{uniformemente en } x \in \mathbb{R}^d.$$

10. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable y existen $f(a^-)$ y $f(a^+)$, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} f(y) dy = (f(a^-) + f(a^+))/2.$$

Demuestra que si $\varphi \in L_c^1(\mathbb{R})$ es par, $\int \varphi = 1$ y $\varphi_t(x) = t^{-1}\varphi(x/t)$, entonces se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t * f(a) = (f(a^-) + f(a^+))/2.$$

11. Utiliza AIR para probar que C_c^∞ es denso en el espacio

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}.$$

12. Sea $e_\alpha(t) := e^{\alpha t} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t)$. Demuestra que

- a) Si $\alpha = a + ib$, entonces $e_\alpha * e_{\bar{\alpha}}(t) = e^{at} \sin(bt)/b$
- b) $e_\alpha * \dots^{(n)} * e_\alpha(t) = t^n e_\alpha(t)/n!$
- c) Si $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ son todos distintos, entonces $e_{\alpha_1} * \dots * e_{\alpha_n}(t) = \sum_{j=1}^n c_j e_{\alpha_j}(t)$, para ciertos $c_j \in \mathbb{C}$
- d) *Opcional:* demuestra que en c) de hecho se tiene

$$c_j = 1/P'(\alpha_j), \quad \text{donde } P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n).$$

Sugerencia: el proceso de inducción de (c) da una fórmula para los c_j , que se simplifica usando

$$P'(\alpha_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\alpha_j - \alpha_i) \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{P'(\alpha_j)} = 0.$$

La primera identidad es sencilla; para probar la segunda puedes aplicar el Tma de Residuos a $1/P(z)$.

Opcionales

13. Dadas dos sucesiones $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{b} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se define su convolución $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ como la sucesión

$$\mathbf{a} * \mathbf{b}(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

siempre que la suma anterior sea absolutamente convergente.

(i) Si $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ y $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ son polinomios, calcular los coeficientes del polinomio producto $P(x)Q(x)$ y relacionarlos con la definición anterior.

(ii) Demostrar la desigualdad de Young para sucesiones: si $1 \leq p \leq \infty$ entonces

$$\|\mathbf{a} * \mathbf{b}\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leq \|\mathbf{a}\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|\mathbf{b}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

(iii) Si $\mathbf{a} \in \ell^p$ y $\mathbf{b} \in \ell^q$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$, probar que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \mathbf{a} * \mathbf{b}(n) = 0$.

14. a) Sea $1 \leq q < \infty$ y $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial_{x_i} \varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \dots, n$. Demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\varphi(\cdot + h\mathbf{e}_i) - \varphi}{h} - \partial_{x_i} \varphi \right\|_q = 0. \quad (\dagger)$$

b) Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi, \partial_{x_i} \varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para $i = 1, \dots, n$. Demuestra que $\varphi * f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y se cumple

$$\partial_{x_i}(\varphi * f)(x) = (\partial_{x_i} \varphi) * f(x).$$

Sugerencia: en a) escribe $\varphi(x + h\mathbf{e}_i) - \varphi(x) = \int_0^1 \varphi_{x_i}(x + t\mathbf{e}_i) dt$, inserta esta expresión en $(\dagger)$ y utiliza la desigualdad integral de Minkowski. En b), supón que $p > 1$ (el caso $p = 1$ está hecho en clase); escribe la identidad pedida como un límite, y utiliza la desigualdad de Hölder y a).

15. Sea $1 \leq p < \infty$. Demuestra que, si $f \in C^n(\mathbb{R}^N)$ es tal que $\partial^\alpha f \in L^p$, $\forall |\alpha| \leq n$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\max_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha f - \partial^\alpha \varphi\|_p < \varepsilon.$$

Sugerencia: razona como en los corolarios de densidad, primero truncando f y después convolucionando con una AIR. Para truncar, utiliza la función de corte $\chi_m(x) = \chi(x/m)$, donde $\chi \in C_c^\infty$ tal que

$$0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi|_{B_1(0)} \equiv 1 \quad \text{y} \quad \chi|_{B_2^c(0)} \equiv 0.$$

16. * La desigualdad de Young establece que $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$.

(a) Estudiar cuándo se tiene igualdad en el caso $p = 1$.

(b) Estudiar cuándo se tiene igualdad en el caso $p = \infty$.

(c) Si $1 < p < \infty$, probar que la igualdad sólo se da si $f = 0$ ó $g = 0$ ctp. No obstante, para cada $\varepsilon > 0$, existen f, g tales que $\|f * g\|_p > (1 - \varepsilon) \|f\|_1 \|g\|_p$.

Nota: para los ejemplos de (c), probar con $f = \chi_{[0,1]}$ y $g = \chi_{[0,a]}$ con a suficientemente grande. Ejercicio extraído de Rudin, Cap 8.