UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Matemáticas
Grado en Bioquímica
Curso 2012–13
Hoja 3

1. Calcula los siguientes límites, primero de forma aproximada dibujando las gráficas (con `draw2d` o `plot2d`), y luego de forma exacta (con la pestaña *Análisis* → *Calcular límite*):

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ (c) $\lim_{t\to +\infty} \dfrac{100}{3+100e^{-t/4}}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} \log(x)$ (e) $\lim_{x\to \pi/2^-} \operatorname{tg}(x)$ (f) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}$

2. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ 4x-5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Dibújala con `draw2d` y determina a partir de la gráfica el $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3. Encontrar las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de las siguientes funciones, dibujándolas en un mismo gráfico junto a la función.

(a) $3-2e^{-x}$ (b) $1/(3+2e^{-x})$ (c) $5e^{-2x}-3e^{-x}$ (d) $\dfrac{x^2-3}{x-2}$

4. Se tiene un cultivo de bacterias en un laboratorio, con el que se experimenta en 3 condiciones ambientales distintas. El número de individuos (en millones) tras t horas viene dado en cada caso por las funciones

$$A(t) = 3te^{-t/2}, \qquad B(t) = \frac{5t^5}{9+3t^5}, \qquad C(t) = \frac{6t^2}{2+3t^2} + \tfrac{1}{5}\sin(3t).$$

Dibuja las funciones con `plot2d` en una misma gráfica y responde a las preguntas

(a) Determina el comportamiento de cada población *a largo plazo*. ¿Cuál crecerá más? ¿Se extingue alguna de ellas?

(b) Al inicio del experimento, ¿qué población crece más rápido y cuál más lento? ¿Se igualan en algún momento las poblaciones A y B? ¿ Y las poblaciones B y C?

(c) Determina mirando la gráfica el valor máximo que podría alcanzar cada población.

5. En las reacciones bioquímicas controladas por una enzima, la velocidad de reacción v depende de la concentración de sustrato s, según la función de Michaelis-Menten

$$v(s) = \frac{as}{k+s}, \qquad \text{(para ciertas constantes } a, k > 0\text{)}$$

(a) Esbozar en una misma gráfica las funciones $v = \frac{10s}{k+s}$ para los valores $k = 1, 2, 5$.

(b) Determina la velocidad máxima $v_{\max}$ que podrían alcanzar las reacciones de (a). ¿Cuál de las reacciones va más rápido y cuál más lento?

(c) En cada caso, ¿qué concentración de sustrato sería necesaria para que la reacción se desarrollara al 50 % de la velocidad máxima alcanzable? ¿Y al 80 % de $v_{\max}$?

6. Representa la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ en el intervalo $[-10, 10]$ y en el intervalo $[-1, 1]$. Localiza gráficamente las raíces del polinomio, dando un valor aproximado. Utiliza la opción `Ecuaciones` $\rightarrow$ `Raíces de Polinomio` para encontrar una aproximación más exacta de dichas raíces.

7. Representa la función $f(x) = xe^{-x} + 1$ y determina un intervalo en el que dicha función se anule. Utiliza los extremos del intervalo en Maxima para encontrar un valor aproximado de la raíz.

8. **Desintegración radioactiva.** El carbono 14 (C^{14}) es un isótopo radioactivo que se crea en las capas altas de la atmósfera por acción de los rayos cósmicos, desintegrándose posteriormente en nitrógeno (N^{14}). En la atmósfera existe un equilibrio entre el C^{12} y el C^{14}, cuya proporción se ha mantenido aproximadamente constante durante muchos años. Cuando las plantas absorben las moléculas de CO_2 de la atmósfera y las transforman en materia orgánica, la relación inicial entre C^{14} y C^{12} en la planta (y por tanto en los animales que las ingieren) es la misma que en la atmósfera. Cuando las plantas o animales mueren la absorción de CO_2 cesa y la desintegración radioactiva de C^{14} continúa, lo que causa que la proporción entre éste y el C^{12} disminuya según la *ley de la desintegración radiactiva.* Esto da un método para medir el momento de la muerte de una planta o animal fosilizado.

   Si llamamos $W(t)$ a la cantidad de C^{14} en el fósil t años después de su muerte, la ley de la desintegración radioactiva establece que

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$$

   siendo $\lambda > 0$ la velocidad de la desintegración, y W_0 la cantidad inicial de C^{14} en el momento de la muerte del fósil.

   a) Se llama semivida de un material radioactivo al tiempo necesario para que se desintegre la mitad de una cantidad dada. Encuentra una fórmula para la semivida en términos de λ, y comprueba que no depende de la cantidad inicial W_0.

   b) Sabiendo que la semivida del C^{14} es de 5 730 años, determina el valor de λ, y dibuja la función $W(t)$ (tomando el valor que quieras para W_0).

   c) Suponer que en una excavación arqueológica las muestras de madera encontradas contienen aproximadamente un 23 % de C^{14} de la cantidad normal. Determina cuántos años hace que se cortó la madera.

   d) Si una muestra tiene 20 microgramos de C^{14} en el instante $t = 0$ ¿cuánto quedará después de 2 000 años?

9. **Velocidad de reacción.** La siguiente función se utiliza en bioquímica para modelar las velocidades de reacción en función de la concentración s de algunos reactivos:

$$V(s) = \frac{a\, s^n}{k^n + s^n}$$

   siendo n y k reales positivos. Por ejemplo, la velocidad de absorción de oxígeno por la mioglobina tiene $n = 1$, mientras la hemoglobina tiene $n = 2'8$.

   a) Dibuje en un mismo gráfico la función para $a = 1$, $k = 2$ y los valores $n = 1$, $2'8$, 4. ¿En qué punto se cortan las tres gráficas?

   b) La constante a se suele escribir $V_{\max}$, mientras k se suele denominar constante de semisaturación. ¿Puedes explicar a qué se deben estos nombres?

   c) ¿Qué reacción va más rápido a concentraciones pequeñas? ¿Y a concentraciones grandes?

10. Los peces crecen indefinidamente durante toda su vida. Su longitud se puede modelar mediante la función de von Bertalanffy:

$$L(t) = L_m(1 - e^{-kt}), \qquad\qquad t \geq 0,$$

siendo $L(t)$ la longitud a la edad t, y k, L_m constantes positivas que dependen de la especie.

   a) Dibuje las gráficas de $L(t)$ para $L_m = 2$, y los valores $k = 1,\ 0'2$.

   b) Interprete el significado de la constante L_m. Para $k = 1$, obtenga la edad en la que se alcanza una longitud del 90 % de L_m. Repita el mismo cálculo para el 99 %. ¿Puede alcanzar el pez la longitud L_m?

   c) En las gráficas del apartado (a), ¿cuál de las curvas alcanza el 90 % de L_m más rápidamente? Explicar qué le sucede a $L(t)$ cuando el valor de k disminuye (con L_m fijo).

11. Suponga que un organismo reacciona a un estímulo sólo cuando dicho estímulo supera un cierto umbral. Si el estímulo es una función del tiempo t y viene dada por $s(t) = \operatorname{sen}(\pi t)$ y suponemos que el organismo reacciona a dicho estímulo sólo si $s(t) \geq 1/2$, defina una función $g(t)$ tal que $g(t) = 0$ cuando el organismo no muestre reacción en el instante t y $g(t) = 1$ cuando el organismo muestre reacción.

   a) Dibuje $s(t)$ y $g(t)$ en la misma gráfica.

   b) Estudie la continuidad de $s(t)$ y de $g(t)$.

Comandos de Maxima para límites y soluciones de ecuaciones

- **Límites.** La sentencia de Maxima para el cálculo de límites es:

  `limit(`*`función,variable,punto,dirección`*`);`
  donde:

  - *`función`* y *`variable`* tienen un significado claro.
  - *`punto`* es el valor donde se desea calcular el límite, y
  - *`dirección`* indica si se quiere tomar un límite por la derecha (en ese caso se pone `plus`) o por la izquierda (en ese caso se pone `minus`). Si este valor no se incluye entonces Maxima calcula el límite ordinario (es decir, no un límite lateral).

  El valor de *`punto`* puede ser un número o una variable con un valor asignado (incluso en ocasiones un parámetro sin valor asignado); pero también puede tomar los siguientes valores especiales:

  - `inf` para el infinito positivo,
  - `minf` para el infinito negativo.

  Maxima puede responder al cálculo de un límite dando su valor o con las siguientes palabras clave:

  - `und`, que significa indefinido;
  - `ind`, que significa indefinido, pero acotado,
  - `infinity`, que es un infinito en el plano complejo (o, en todo caso, sin signo).

  Se puede acceder a esta sentencia de Maxima mediante el menú Análisis → Find Limit... de wxMaxima.

- **Soluciones de ecuaciones**

  1. La función `solve` tiene la siguiente sintaxis:

     `solve(`*ecuación*`,`*var*`)`

     donde *ecuación* es la ecuación que se desea resolver y var es la variable en la que se quiere resolver dicha ecuación. Si en lugar de una *ecuación* se escribe una expresión, digamos, *expr*, entonces se interpreta como la ecuación $expr = 0$.

     Ejemplo: `solve(x^3-3*x^2+x-2,x)`

     En general la ecuación puede contener funciones racionales, trigonométricas y exponenciales, pero rara vez nos proporciona la solución en estos casos. Suele ser efectiva sólo con funciones racionales que contienen polinomios de grado menor o igual que 4.

     Se puede acceder a esta función mediante el menú: `Ecuaciones->Resolver`.

  2. **Raíces de polinomios.** La función

     `to_poly_solve(`*ecuación*`,`*var*`)`

     proporciona todas las soluciones de la *ecuación* con valores aproximados. Aunque la *ecuación* puede contener funciones complicadas, normalmente la reservamos para ecuaciones con funciones racionales.

     Un resultado análogo, sólo para polinomios, se obtiene con:

     `allroots(`*polinomio*`)`

     Se puede acceder a estas funciones mediante el menú: `Ecuaciones->Resolver (to_poly)` y `Ecuaciones->Raíces de un polinomio`.

3. **Aproximación numérica de soluciones de ecuaciones arbitrarias.** La función

   `find_root(`*ecuación*`,`*var*`,a,b)`

   permite calcular de forma aproximada una solución de *ecuación* que esté en el intervalo $[a, b]$. Para que funcione a y b deben ser valores en los que la cantidad que deba anularse según la *ecuación* tome signos distintos; además a y b no deben estar muy alejados.

   Se puede acceder a esta función mediante el menú: `Ecuaciones->Calcular raíz`.

- **Funciones definidas a trozos.** Para definir funciones de distintas formas según se verifique una u otra condición, se utiliza la sentencia siguiente:

  `f(x):=if` *Condición* `then` *Def1* `else` *Def2*

  Si se verifica *Condición* el valor de $f(x)$ será el asignado en *Def1*, en caso contrario el asignado en *Def2*.

  En la *Condición* pueden aparecer comparaciones, por ejemplo:

  - menor que: se escribe `<`,
  - menor o igual que: se escribe `<=`

  y análogos.