MATEMÁTICAS. **1^{o} grado Bioquímica.** **Curso 2013-2014**

HOJA 4: CRECIMIENTO EXPONENCIAL Y FUNCIONES DE 1 VARIABLE

1. El *modelo exponencial*: si una población, inicialmente con N_0 individuos, crece un $\alpha\%$ cada año, entonces el número total de individuos tras t años viene dado por
$$y(t) = N_0\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)^t.$$
   a) Comprobar que $y(t)$ se puede escribir como $y(t) = N_0e^{rt}$, tomando $r = \ln(1 + \frac{\alpha}{100})$.

   b) Considerar tres poblaciones dadas por
$$y_1 = 100e^{2t}, \quad y_2 = 500e^{0'5t}, \quad y_3 = 1000e^{-t}.$$
   - ⋄ Determinar qué porcentaje crece al año cada una de las poblaciones.
   - ⋄ Calcular cuándo se igualan las poblaciones y_1 e y_3, y cuándo se tiene $y_3 = 10$.
   - ⋄ Representar en una misma gráfica las funciones y_1, y_2 e y_3. ¿Cuál tendrá más individuos a largo plazo?

2. Una población de bacterias se duplica cada 6 horas. Si inicialmente hay mil individuos, ¿cuántos habrá al cabo de t horas? ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

3. En presencia de un antobiótico, se observa que un cultivo de bacterias, inicialmente con cien mil individuos, decrece un 5% cada día.

   (a) Escribir el tamaño de la población como $y(t) = ae^{bt}$, calculando a y b.

   (b) Determina el número de individuos tras 4 días, y cuándo tarda la población en bajar a un cuarto de la inicial.

   (c) Determina por qué factor se divide la población al cabo de una semana, y cuántos individuos se pierden durante el séptimo día.

4. De cierto material radioactivo se sabe que se desintegra un 20% cada 10 años. ¿Qué porcentaje del material inicial quedará al cabo de 20 años? ¿Cuántos años tardará en desintegrarse un 80% del material inicial?

5. El ^{14}C tiene una semivida de 5730 años. En una reciente excavación se ha hallado un hueso fosilizado cuyo contenido en ^{14}C es de sólo un 1% repecto a la cantidad que se encuentra en un hueso similar de un ser vivo. Determina la edad del fósil.

6. El Yodo 131 es radiactivo y tiene una semivida de 8 días. En una prueba médica un paciente ingiere una dosis inicial de ^{131}I que emite 100 milicuries (mCi), y que se acumula de forma natural en su tiroides. ¿Qué emisión de ^{131}I producirá el paciente al cabo de una semana? ¿Cuándo estarán las emisiones por debajo de 5 mCi?

7. a) La política seguida en una reserva natural para proteger al muflón resulta un éxito, y cada año la población se incrementa en un 8%. Si al iniciar el programa se contaba con 200 ejemplares, ¿cuál es la población estimada al cabo de 30 años?

   b) ¿Cuál tendría que haber sido el porcentaje de crecimiento anual para que en ese período la población no superara los 1000 ejemplares?

8. En un laboratorio se observa que la concentración de hemoglobina en un cultivo disminuye en una proporción fija por unidad de tiempo. A las 7 de la mañana medimos una concentración de 15 *ppm* (partes por millón). Media hora más tarde la concentración ha bajado un 1% respecto a la anterior.

   a) Escribir la función que expresa la concentración de Hb en función del tiempo.

   b) ¿Que concentración había a las $3:30$ de la mañana, antes de que hiciésemos nuestra primera medición?

   c) ¿Cuanto tardará en bajar la concentración hasta 3 *ppm*?

9. Se ha observado que la cantidad de basura generada por una gran ciudad aumenta un 5% cada año. Se construye un vertedero, inicialmente vacío, en el que el primer año se depositan 1000 toneladas de basura. Como la basura no se retira, se va acumulando en años posteriores.

   a) Describir la función $x(n)$ = cantidad de basura generada por la ciudad durante el año n.

   b) Determinar la cantidad de basura **acumulada** en el vertedero al cabo de n años.

   c) Si la capacidad del vertedero son 90.000 Tm de basura, calcular cuántos años han de pasar para que el vertedero se llene.

10. Un laboratorio cuenta inicialmente con 1000 ejemplares de *E. Coli.* La población crece de forma natural un $0'5\%$ cada semana. Por otro lado, al final de la semana se extraen para uso comercial k ejemplares de *E. Coli.*

    a) Si $k = 10$, determina el número de ejemplares al cabo de 24 semanas.

    b) Si seguimos extrayendo $k = 10$, ¿cuánto durarán las existencias de *E. Coli*?

    c) ¿Qué valor de k deberíamos usar para que la población tras 24 semanas sea de 500 ejemplares?

11. Cada 6 horas tomamos 20 miligramos de un medicamento y cada 6 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

    a) ¿Cuántos miligramos de medicamento tendremos inmediatamente después de tomar la tercera dosis?

    b) Encuentra una expresión para los miligramos de medicamento en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 6 horas).

    c) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

12. En cierto cultivo de bacterias se observa que la población crece un 5% cada hora, a partir de una población inicial de 1000 individuos.

    a) Escribir una fórmula para el número de bacterias tras n horas. ¿Cuándo se alcanzará el millón de individuos?

    b) Se quiere probar un antibiótico, del que se sabe que cada dosis elimina 200 bacterias. Si al cultivo anterior le aplicamos una dosis de antibiótico cada hora, escribe una fórmula para el número de bacterias tras n horas. ¿Cuánto tardará en desaparecer la población de bacterias?

13. El número de individuos en poblaciones con recursos limitados se suele modelizar con una *función logística* (o sigmoide):

$$f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-rt}}, \quad t \in (0, \infty), \quad \text{donde } a, k, r \text{ son ctes } > 0.$$

    a) Representa las funciones $f_1(t) = \dfrac{150}{1 + 2e^{-t}}$ y $f_2(t) = \dfrac{150}{1 + 2e^{-2t}}$ para $t > 0$.

    b) Hallar el instante en que las velocidades de crecimiento son máximas.

    c) ¿En qué tamaño tienden a estabilizarse las poblaciones? ¿Cuándo se alcanza el 90% de la población máxima?

14. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \le t < \infty,$$

    donde t representa el tiempo en semanas.

    a) Representar la función.

    b) Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.

    c) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima.

15. En las pruebas de un medicamento antiviral, se observa que la concentración de virus V (en mgr/ml) desciende rápidamente, pero luego vuelva a repuntar. La función que describe, aproximadamente, la evolución de V en función del tiempo (en horas) es:

$$V(t) = \frac{5t^2 - 5t + 10}{t^2 + 1}, \text{ para } t \ge 0.$$

    a) ¿Qué concentración de virus había al comenzar el problema? ¿En qué valor se estabiliza a largo plazo?

    b) ¿Cuándo tarda en hacerse mínima la concentración de virus, y cuál es su valor en ese momento?

    c) ¿A qué velocidad crece la población de virus al cabo de 3 horas?

    d) Con los resultados de los apartados anteriores hacer una representación aproximada de la evolución de $V(t)$.

16. Se está estudiando la capacidad de reproducción de una especie de aves en una isla. Si $d =$ densidad de aves (en parejas/m^2) y $B =$ número medio de descendientes por pareja, se observa experimentalmente la relación

$$B = 4 + 2d - 2d^2.$$

    a) Dibujar la gráfica de $B(d)$.

    b) Hallar d que maximiza el número de descendientes por pareja, y el valor de dicho máximo.

    c) Hallar d que maximiza el número de descendientes por m^2, y el valor de dicho máximo.

17. Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico (Y) de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses), y se observa que se ajusta razonablemente a la función:

$$y = f(t) = 4\ln(t+1) - 5\ln(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?

b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?

c) Hacer una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período [0, 24] (los dos primeros años).

18. En un estudio sobre cierta infección microbiana se observa que el número de microbios (en miles) en una placa de Petri se ajusta aproximadamente a la curva $N(t) = 10\,te^{-3t}$, donde t es el tiempo en días.

(a) Dibuja la gráfica de $N(t)$ ¿Cuándo alcanza la población microbiana su tamaño máximo? ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿Hay algún punto de inflexión?

(b) Si la velocidad de infección de tejido sano es de aproximadamente $30\mu m^2$ al día por cada mil microbios, calcular la extensión total de tejido infectado en los primeros 4 días.

19. a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \ln(1+x)$ alrededor de $x = 0$, y compara el valor exacto y el aproximado para $x = 0'05$. ¿Para qué valores de x podemos decir que $\ln(1+x) \approx x$ con error menor que 10^{-3}?

b) En los modelos de crecimiento exponencial, un crecimiento medio anual del $\alpha\%$, se traduce en una tasa de crecimiento instantánea $r = \ln(1 + \frac{\alpha}{100})$. En una población que crece un 3% anual, ¿qué error cometemos si aproximamos $r = 0'03$? ¿Y en una población que crece un 30% anual?

20. Se estudia el comportamiento de la función de Michaelis-Menten $V = S/(0'5+S)$ para concentraciones pequeñas de sustrato S.

a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de V alrededor de $S = 0$, representando ambas gráficas.

b) Usar el polinomio de grado 2 para calcular el aproximado de V cuando $S = 0'10$. ¿Qué margen de error se comete?

Ejercicios complementarios para practicar con ordenador

21. Se está estudiando la concentración en sangre de dos medicamentos A y B tras ser administrados a un paciente. Experimentalmente se observa que las concentraciones se ajustan a las curvas

$$A(t) = 300 \cdot 0.8^t \qquad B(t) = 250 \cdot 0.9^t \qquad t \geq 0$$

con $t =$ tiempo (en horas) desde la administración del medicamento.

(a) ¿Cuándo se alcanza una concentración igual a 200 para cada uno de los medicamentos?

(b) Esboza en una misma gráfica $A(t)$ y $B(t)$, y determina cuándo se igualan las concentraciones. A largo plazo, ¿cuál de los medicamentos tiene mayor concentración en sangre?

(c) Dibuja la gráfica de $B(t) - A(t)$, especificando las regiones de crecimiento, concavidad y el comportamiento a largo plazo. ¿Cuál es la diferencia máxima de concentraciones entre los dos medicamentos?

22. En una reacción química $X + Y \to Z$ se observa que las cantidades de reactivos X e Y (en mM) tras t segundos vienen dadas respectivamente por

$$X(t) = 500 \cdot e^{-t/2} \qquad Y(t) = \frac{300}{1 + 0'4t^2} \qquad t \geq 0$$

(a) Esboza en una misma gráfica $X(t)$ e $Y(t)$.

- ¿Cuánto debemos esperar para que las cantidades de ambos productos estén por debajo de 150 mM?
- ¿Cuál de los productos llegará antes a los 150 mM?
- Después de mucho tiempo, ¿de cuál de los productos habrá mayor cantidad?

(b) Dibuja la gráfica de $X(t)/Y(t)$.

- ¿Cuándo será máxima la ratio X/Y y qué ocurre a largo plazo?
- ¿Cuándo será X la mitad que Y?
- Determina en qué períodos de tiempo la ratio crece y en cuáles decrece.

23. Se tiene una disolución ácida a la que se va agregando progresivamente una base fuerte ($NaOH$). Se observa que el pH de la disolución aumenta con el volumen V de $NaOH$ (en ml) según la función

$$pH(V) = 2 + \frac{12}{1 + 100e^{-2V}}, \quad V \geq 0.$$

(a) Dibuja la curva.

(b) ¿Cuál es el pH máximo para esta disolución? ¿A partir de que V nos acercamos a un 90% del pH máximo?

(c) Se considera que la base "neutraliza" al ácido en el punto de inflexión de la curva. Determina el valor de V y pH en dicho punto.

(d) Esboza la gráfica de la derivada de $pH(V)$. ¿Con qué velocidad aumenta el pH cuando $V = 1$? ¿Cuál es la velocidad máxima de aumento de pH, y para qué volumen se alcanza?

(e) Para ciertos compuestos (ácidos dipróticos) dichas curvas pueden tener varios puntos de inflexión. Calcula los puntos de inflexión cuando la relación es

$$pH(V) = 2 + \frac{8}{1 + 100e^{-2V}} + \frac{4}{1 + 300e^{-10V}}.$$