MATEMÁTICAS. **1º grado Bioquímica.** **Curso 2013-2014**

HOJA 5: INTEGRALES

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$(a)\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad (b)\ \int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad (c)\ \int \frac{x^3}{(1+x^4)^3}\,dx$$

$$(d)\ \int e^{3x}\,\mathrm{sen}\,2x\,dx \qquad (e)\ \int x\ln x\,dx \qquad (f)\ \int x^5\cos(x^2)\,dx$$

$$(g)\ \int \frac{dx}{(1-x)(1+2x)} \qquad (h)\ \int \frac{x^2+2}{x^2(x+1)}\,dx \qquad (i)\ \int \frac{x+1}{x^2+4}\,dx$$

$$(j)\ \int x^2e^{-x}\,dx \qquad (k)\ \int \mathrm{sen}^2(4x)\,dx \qquad (l)\ \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

2. (a) Una cepa de virus ataca celulas sanas con una velocidad (instantánea) de infección de $t+10$ células/minuto. Determina $x(t)$ = número de células infectadas tras t minutos, y calcula su valor en $t = 10$ min.

   (b) Suponer ahora que la velocidad **media** de infección durante el día n es de $n+10$ células/min. En este caso, ¿cuántas células se infectarían al cabo de 10 minutos?

3. Una muestra radiactiva emite partículas alfa con velocidad $v(t) = 100e^{-0'1t}$ dpm (desintegraciones por minuto).

   a) Calcula y dibuja la gráfica de $X(t)$ = número total de partículas alfa emitidas tras t minutos

   b) ¿Cuántas partículas alfa ha emitido durante la primera hora? ¿Cuántas emitirá en total? ¿Cuánto tardará en emitir el 80% de la radiación?

4. Un coche se mueve en línea recta con velocidad (instantánea) $v(t) = 300t(1-t)$ kms/hora. Su posición inicial es el km 30, y viaja durante una hora y media.

   a) Esboza la gráfica de $v(t)$. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza el vehículo? ¿Cuándo se empieza a mover hacia atrás?

   b) Hallar la posición del vehículo al cabo de 1 hora.

   c) ¿Cuándo regresa al punto de partida? ¿Qué distancia total recorre en los primeros 75 minutos?

5. Tras una insuficiencia respiratoria a un paciente se le suministra O_2, de modo que la concentración en sangre aumenta con velocidad $\frac{5t}{2+t}$ en ml de O_2 por minuto y dl de sangre. Si la concentración inicial era de sólo 5 ml de O_2 por dl de sangre,

   a) Calcula $C(t)$ = concentración de O_2 en la sangre del paciente tras t minutos, y utiliza el ordenador para esbozar su gráfica.

   b) ¿Qué concentración hay al cabo de 3 min? ¿Cuánto tardará en alcanzar una concentración de 15 ml O2/dl?

   c) Si podemos regular el manómetro de modo que la velocidad de entrada de O_2 sea $v(t) = 5t/(b+t)$, ¿quién tendría que ser b para que se alcance una concentración de 15 ml $O2$/dl en sólo 3 minutos?

6. a) Calcula el área bajo la parábola $y = x(2-x)$ y sobre el eje x.

   b) Dibuja la región delimitada por las curvas $y = 5-x^2$, $y = 3-x$ y calcula su área.

   c) Calcula el área bajo la gráfica de $f(x) = \mathrm{sen}^2 x$, para $0 \le x \le 2\pi$.

7. El número N de mutaciones que se producen en cierta proteína tras una exposición a rayos X tiene un histograma parecido a la curva

$$f(x) = \frac{1}{4}xe^{-x/2}, \quad 0 < x < \infty,$$

   es decir la Prob$(a \le N \le b)$ es igual al área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$.

   a) Comprueba que el área total bajo la gráfica es 1.

   b) Calcula la probabilidad de que haya menos de 3 mutaciones.

   c) Calcula el número medio de mutaciones, dado por $\int_0^\infty xf(x)\,dx$.

   d) Calcula el número mediano de mutaciones, es decir a tal que Prob$(N \le a) = 0'50$.

Ejercicios complementarios para practicar con ordenador

8. Una fábrica acumula vertidos con contenido de Hg en un depósito, pero debido a una fuga parte de éstos pasan a un humedal cercano. Tras realizar mediciones se observa que la velocidad de paso al humedal, en gr Hg/día, viene dada por la curva
$$v(t) = 2 - 2\cos(3t)\, e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

   a) Esboza la gráfica de $v(t)$, y determina cuántos gr Hg/día estarían pasando al humedal a largo plazo.

   b) ¿En qué momento está pasando más Hg al humedal? ¿Qué cantidad pasa?

   c) Calcula $x(t)$ = gr Hg acumulados en el humedal tras t días, dibuja su gráfica, y determina su valor tras una semana. ¿Cuánto tardarían en acumularse 50 gr Hg?

9. Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2/(1+x^2)$.

   a) Dibuja las gráficas de f y g y determina en qué puntos se cortan

   b) Calcula el área de la región encerrada entre f y g.

10. Las variables aleatorias "normales" tienen un histograma parecido a la función de Gauss:
$$g(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

    Si X es una variable aleatoria normal utiliza el ordenador para

    a) esbozar la gráfica de $g(x)$

    b) hallar las probabilidades $\mathbf{P}(-1 < X < 1)$, $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$, $\mathbf{P}(-3 < X < 3)$, y también $\mathbf{P}(X > 1'5)$.

    c) Determina el valor del primer cuartil, es decir q_1 tal que $\mathbf{P}(X < q_1) = 0'25$.