MATEMÁTICAS. **1º grado Bioquímica.** **Curso 2013-2014**

HOJA 6: ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Resolver las ecuaciones diferenciales

$$(a)\ \frac{dx}{dt} = \frac{tx}{1+t^2} \quad \text{con } x(0)=1 \qquad\qquad (b)\ \frac{dx}{dt} + 3t^2x^2 = 0 \quad \text{con } x(1)=1/2$$

2. Un recipiente inicialmente contiene 1 litro de argón a una presión de 4 atmósferas. Al comprimirlo lentamente la relación entre volumen V y presión P cumple la ecuación diferencial $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{5P}{3V}$.

   a) Calcula P como función de V.

   b) ¿Cuál es la presión cuando el volumen es 1/2 litro?

   c) ¿Hasta qué volumen debemos comprimirlo para que la presión sea de 25 atmósferas?

3. En una reacción química de orden 2, digamos $\mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow{k} \mathrm{P}$, la cantidad de reactivo A tras t segundos (en moles) cumple la ecuación diferencial

$$A'(t) \ = \ -2k\,A(t)^2,$$

   donde $k > 0$ es la cte de velocidad de la reacción.

   a) Resuelve está ecuación diferencial si $k = 0'5$ y $A(0) = 1$ mol.

   b) Determina cuándo se habrá transformado el 90% del reactivo A.

   c) Determina los moles de producto $P(t)$ tras t seg, y dibuja las gráficas de $A(t)$ y $P(t)$.

4. Una reacción química de orden 3, $\mathrm{A} + \mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow{k} \mathrm{P}$, cumple la ecuación diferencial

$$A'(t) \ = \ -3k\,A(t)^3,$$

   a) Resuelve está ecuación diferencial si $k = 0'5$ y $A(0) = 1$ mol, dibujando la gráfica de la solución.

   b) ¿Cuándo se habrá transformado el 90% del reactivo A? ¿Es más lenta o más rápida que la de orden 2?

5. La evolución de una población de bacterias (en millones) viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 0'2x(5-x),$$

   con $t =$ tiempo en horas. Si inicialmente hay un millón de bacterias:

   a) Resuelve la ED y calcula el número de bacterias tras una y dos horas.

   b) Calcula el número de bacterias a largo plazo.

   c) ¿En qué momento la población será de 4 millones?

6. Un paciente hospitalizado recibe mediante un gotero 200 miligramos diarios de cierto medicamento. Se sabe que cada día el cuerpo elimina de manera natural una quinta parte del medicamento en la sangre.

   a) Plantear una ED para $x(t) =$ mgr de medicamento en la sangre tras t días. A largo plazo, ¿qué cantidad de medicamento habrá en el organismo?

   b) Resuelve la ED, y determina cuándo se alcanza el 95% de la cantidad máxima.

   c) ¿Qué dosis diaria habría que aplicar si a largo plazo queremos 1500 mgr de medicamento en la sangre?

7. Una pecera contiene inicialmente 1000 litros de agua salada, con un contenido total de sal de 500 gr. Queremos progresivamente aumentar su concentración, y para ello extraemos líquido de la pecera a razón de 20 litros por minuto, y añadimos desde un grifo externo otros 20 litros/min de una solución salina con 4 gramos de sal por litro.

   a) Escribir una ED para $x(t) =$ gr NaCl en la piscina tras t minutos. ¿Qué cantidad de sal habrá en la piscina a largo plazo?

   b) Resuelve la ED y determina cuándo se alcanzará una concentración de 3'5 gr/litro.

8. En una reacción química reversible $\mathrm{A} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{X}$, las concentraciones de A y X tras t seg cumplen

$$A'(t) = -k_1A(t) \ + \ k_2X(t).$$

   Suponer que inicialmente hay sólo 1 mol de A, de modo que $X(t) = 1 - A(t)$

   (a) Hallar la concentración de equilibrio del reactivo A (en términos de las ctes k_1, k_2).

   (b) Si se observa que A_{eq} =0'25 moles. ¿Qué relación debe haber entre k_1 y k_2? ¿Qué dirección va más rápida?

   (c) Resuelve la ED, y determina k_1, k_2 si se observa que las concentraciones de A y X se igualan tras 15 seg.

Ejercicios complementarios para practicar con ordenador

9. En una reacción química $\mathrm{A} + \mathrm{B} \xrightarrow{k} \mathrm{X}$, los moles de producto $X(t)$ tras t segundos cumplen la ecuación

$$X'(t) = kA(t)B(t).$$

Si inicialmente se tienen a moles de A, b moles de B y ninguno de X, entonces $A(t) = a - X(t)$ y $B(t) = b - X(t)$, y la ecuación queda

$$X'(t) = k\big(a - X(t)\big)\,\big(b - X(t)\big).$$

Suponer que $k = 1/2$, $a = 1$ y $b = 3$.

(a) Sin resolver la ecuación, ¿cuántas moléculas de A, B y X habrá a largo plazo? Esboza las gráficas.

(b) Resuelve la ecuación diferencial. ¿Cuándo será la cantidad de X mayor que $0'9$ moles?

(c) Suponer que se modifica la reacción de modo que disminuye progresivamente la velocidad de crecimiento de X, quedando la ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = 0'5(1-x)(3-x) - 0'25t.$$

Dibujar la solución con ordenador[1]. Determina en este caso la cantidad máxima de producto, y estima cuando se extingue.

10. Tenemos un cultivo de virus, inicialmente con mil individuos, que crece según la ley logística afectada por un factor estacional, de acuerdo con la ecuación diferencial

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \operatorname{sen}(\pi t)$$

donde $x(t)$ = número de individuos (en miles) tras t horas.

a) Con ayuda de un ordenador, representa gráficamente $x(t)$ durante las primeras 24 horas.

b) Explica entre qué valores oscila la población, y cuántas veces oscila al cabo del día.

c) Suponer que añadimos un flujo continuo de antiviral que elimina a indiv/hora (en miles), de modo que la ecuación queda

$$x'(t) = 0'2x(5-x) + \operatorname{sen}(\pi t) - a$$

Dibujar la solución de la ED para valores del parámetro[2] $0 \le a \le 1$. ¿A partir de qué valor de a la población se extingue? ¿Cuál es el tiempo de extinción?

[1] Para dibujar soluciones numéricas de ED con Maxima, se puede usar el comando `plotdf`. Por ejemplo,

$$\texttt{plotdf}(0.5*(1-x)*(3-x)-0.25*t,\ [t,x],\ [t,0,10],\ [x,-1,1],\ [\texttt{trajectory\_at},0,0]).$$

[2] Para dibujar soluciones numéricas dependiendo de un parámetro se puede añadir la orden `sliders`. Por ejemplo,

$$\texttt{plotdf}(0.2*x*(5-x)+\sin(\pi t)-a,\ [t,x],\ [t,0,15],[\texttt{trajectory\_at},0,1],[\texttt{sliders},\text{"}a=0:1\text{"}]).$$