B 1'9

Nombre y dni:

1.- Se prueban dos productos químicos para intentar controlar el crecimiento de bacterias tróficas en depósitos de agua. Después de aplicar cada uno de los productos, se obtienen las siguientes mediciones (número de colonias por litro de agua):

9'9

producto 1	154	149	151	162	175	174	156
	164	$\boxed{147}$	162	$\boxed{191}$	153	155	149
producto 2	208	201	183	214	$\boxed{250}$	196	196
	197	238	201	228	179	187	$\boxed{156}$

a) Representa los datos en un mismo diagrama de tallos y hojas

b) Calcula los cuartiles y mediana en cada caso, indica los datos atípicos (si los hubiera), y dibuja los correspondientes boxplot

c) Describe con palabras cada conjunto de datos: en torno a qué valor están centrados, dispersión aproximada, si hay sesgos o datos atípicos... ¿Se puede concluir que un producto es más eficiente que el otro?

Nota: 2 puntos

2

a)

Producto 2		Producto 1
	14	979
6	15	41635
	16	242
9	17	54
73	18	
766	19	1
118	20	
4	21	
8	22	
8	23	
	24	
0	25	

b) Producto 1:

$M = \frac{158 + 155}{2} = 156'5$ (156) $Q_1: 151$ $Q_3: 164$

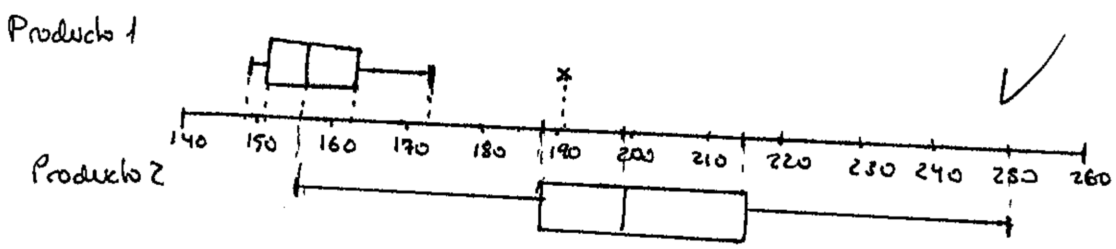
$RI = Q_3 - Q_1 = 13$ $IT = [Q_1 - 1'5 \cdot RI, Q_3 + 1'5 \cdot RI] = [151 - 1'5 \cdot 13, 164 + 1'5 \cdot 13]$

$IT = [131'5, 183'5]$

Producto 2:

$M = \frac{197 + 201}{2} = 199$ $Q_1: 187$ $Q_3: 214$

$RI: Q_3 - Q_1 = 214 - 187 = 27$ $IT = [187 - 1'5 \cdot 27, 214 + 1'5 \cdot 27] = [146'5, 254'5]$



c)

Podemos observar que los datos del producto 1 están ~~mucho más~~ muy concentrados, de hecho entre 151 y 164 se concentran el 50 % de los datos. Además se observa que hay un ligero sesgo a la ~~izquierda~~ derecha y también hay un dato atípico; el ~~181~~ 191

En cuanto a los datos del producto 2, están mucho mas dispersos que los de el producto 1, de hecho en este caso el 50 % de los datos están centrados entre 187 y 214. Además no encontramos ningún dato atípico, y tampoco sesgo alguno.

~~También podemos observar que, aunque los resultados hayan sido dispersos~~, el producto 2

también podemos observar que el producto 1 permite controlar mejor el crecimiento de las bacterias, pues hay menos colonias por litro de agua y además los datos están más centrados, ~~por~~ lo que se traduce en que el producto 1 tiene resultados más homogeneos y su uso se puede controlar mejor, mientras que en caso del producto, los resultados son más dispares y se pueden controlar menos, hay más margen de error.

Muy bien razonado

Nombre y dni: María Arnaldos Carrillo **B**

2.- En el estudio de una reacción enzimática que sigue el modelo de Michaelis-Menten,

$$V = \frac{v_{\max}[S]}{k+[S]}$$

se han obtenido en el laboratorio los siguientes datos

[S] (mol/ml)	0'15	0'37	0'75	1'50	3	6	12
V (mol/min)	9'8	16'8	21'5	29'9	36'2	36'3	37'2

3

(i) Calcula la recta de regresión de los datos $(\frac{1}{[S]}, \frac{1}{V})$, y describe la calidad del ajuste.

(ii) Usando que $\frac{1}{V} = \frac{k}{v_{\max}}\frac{1}{[S]} + \frac{1}{v_{\max}}$, estima el valor de los parámetros $v_{\max}$ y k.

(iii) Representa en una gráfica los puntos originales y la curva de Michaelis-Menten que has obtenido en (i)+(ii), y describe si te parece un buen ajuste.

(iv) ¿Sabrías dar una estimación más exacta de los parámetros $v_{\max}$ y k?

Nota: 3 puntos realizamos el cambio de variable indicado

i)

$\frac{1}{[S]}$	6'67	2'703	1'333	0'667	0'3333	0'16667	0'8333
$\frac{1}{V}$	0'102	0'0 5952	0'0465	0'3344	0'02762	0'02755	0'2688

~~realizamos el~~ calculamos una recta de regresión empleando maxima y obtenemos una recta tipo $y = A + BX$

$$\frac{1}{V} = 0'01154\,\frac{1}{[S]} + 0'02652$$

mirando la gráfica no se ve también.

Se trata de un ajuste muy bueno con un coeficiente de correlación $r = 0'99603$ fuerte.

ii) En la recta obtenida, $y = A + BX$ y usando que $\frac{1}{V} = \frac{k}{V_{máx}} \cdot \frac{1}{[S]} + \frac{1}{V_{máx}}$, observamos que $B = \frac{K}{V_{max}}$ y $A = \frac{1}{V_{max}}$. Entonces:

$$B = \frac{K}{V_{max}} = 0'01154 = k \cdot \frac{1}{V_m} \quad y \quad A = \frac{1}{V_{max}} = 0'02652$$

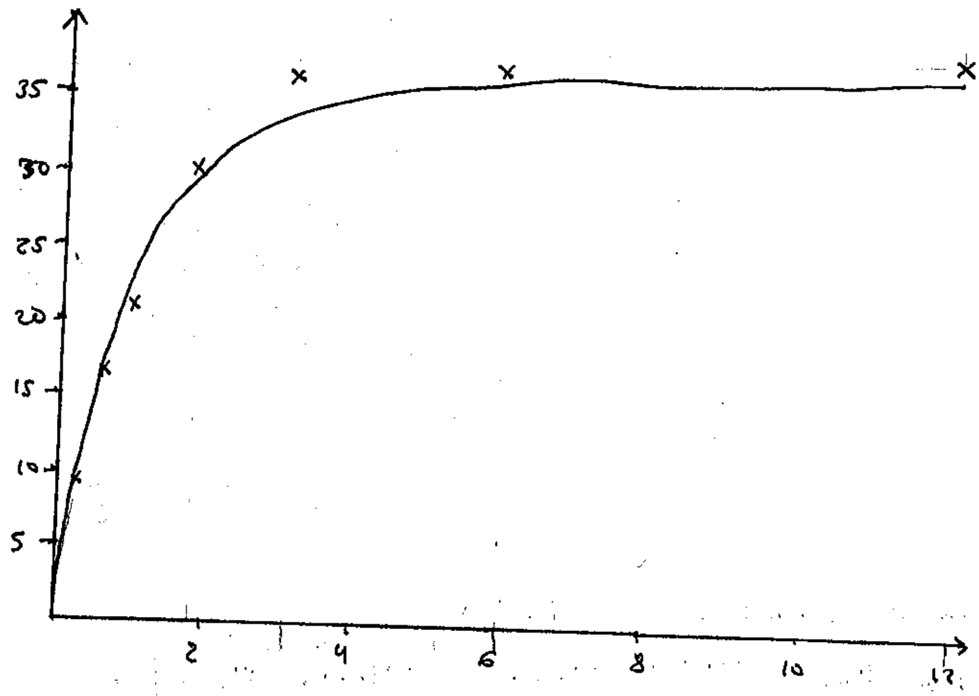
$$V_{max} = \frac{1}{0'02652} = 37'71$$

$$K = \frac{0'01154}{1/V_{max}} = \frac{B}{A} = \frac{0'01154}{0'02652} = 0'435140$$

Obtenemos la ~~función~~ curva

$$[S] = \frac{37'71\,[S]}{0'435140 + [S]}$$

¿ii)



Parece un buen ajuste mirando su coeficiente de correlación $r = 0'996$, pero si observamos la curva nos damos cuenta de que de que la función se queda un poco baja al final

S	0'5	1	2	2'5	8
V	20'16	26'22	30'96	32'12	35'76

¿v) Sí utilizando los cambios $x = [S]$ $y = \frac{[S]}{V}$ mediante la ecuación $\frac{[S]}{V} = \frac{1}{V_{max}}[S] + \frac{K_M}{V_{max}}$

S	0'15	0'37	0'75	1'5	3	6	12	
S/V	0'0153	0'02202	0'03488	0'05012	0'08287	0'165289	0'32258	

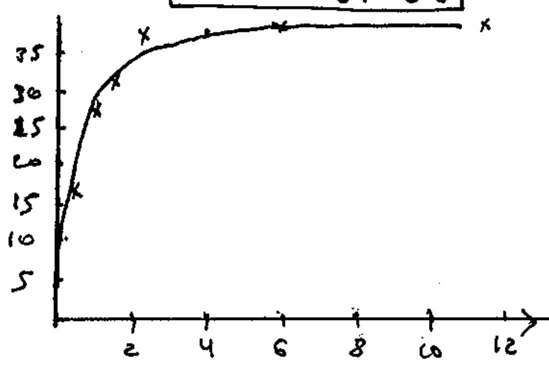
obtenemos una recta $\frac{S}{V} = 0'025792\,S + 0'0114347$

donde $0'025792 = \frac{1}{V_{max}}$ y $0'0114347 = K_M \cdot \frac{1}{V_{max}}$

$V_{max} = \frac{1}{0'025792} = 38'77$ (se parece a 37'7 pero es un poco más alta)

$K_M = \frac{0'0114347}{0'025792} = 0'44334$ (también un poco más alta que K_M calculada con el anterior método)

obtenemos: $\boxed{V = \frac{38'77[S]}{0'44334 + [S]}}$



tiene una correlación más fuerte ~~alta~~, de 0'9996, y la recta no se queda tan baja al final.

Nombre y dni: ..María Arnaldos Carrillo...................... **B**

3.- En un estudio sobre radioterapia se observa que la densidad de células tumorales (en miles cel/ml) se ajusta aproximadamente a la curva

$$D(t) = 20\,(t+2)e^{-t/8},$$

donde t son los días de exposición a la terapia.

3

(a) Dibuja la gráfica de $D(t)$ durante el primer mes, y describe sus características principales: evolución a largo plazo, densidad máxima de células tumorales, si hay algún punto de inflexión...
(b) ¿Cuándo baja la densidad por debajo de 20 mil cel/ml? ¿A qué velocidad decrecen las células tumorales en ese momento?
(c) Por otro lado, sin radioterapia se observa que las células tumorales crecen con una velocidad

$$V(t) = 40\,e^{-t/8}$$

(en miles cel/ml y día). Si inicialmente en el tejido hay 40 mil cel/ml, ¿qué densidad de células tumorales habrá al cabo de dos semanas?

Nota: 3 puntos

a) En cuanto a su evolución a largo plazo:

$\lim_{t\to+\infty} D(t) = 0$ A largo plazo la densidad de células tumorales tiende a 0 cel/ml

La densidad máxima de células tumorales: hay que estudiar la primera derivada:

$D'(t) = 20\,e^{-\frac{t}{8}} - 2'5(t+2)e^{-t/8} = e^{-t/8}(20 - 2'5(t+2)) = 0$

$t=6$ (calculado con maxima)

hay un máximo en $(6, 75'58)$

Para el calculo del punto de inflexión:

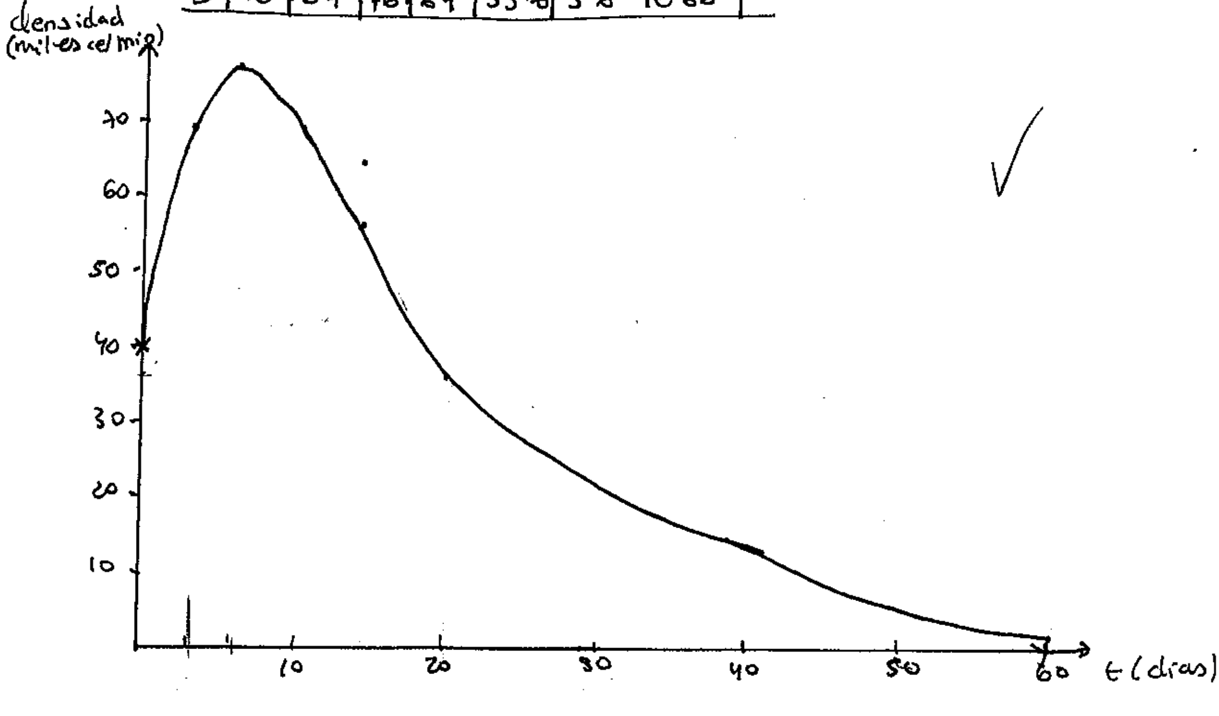
Si hay un punto de inflexion $f''(x) = 0$

$D''(t) = 0'3125(t+2)\cdot e^{-t/8} - 5\cdot e^{-t/8} = 0'0625\cdot e^{-t/8}(5t-70) = 0$

$t=14$ (calculado con maxima)

hay un punto de inflexión en $(14, 55'6)$

t	0	3	6	10	14	20	60
D	40	69	76	69	55'6	36	0'68



b)

Busco $t / D(t) = 20$

$$20(t+2)\cdot e^{-t/8} = 20$$

gráficamente se observa $t \simeq 26'8$

$t = 26'91$ días $\simeq 26$ días y 21 horas y 50 minutos

Para calcular ~~en~~ que velocidad crecen esas células en ese momento hay que sacar $D'(t)$ ~~d~~en ese t.

$$D'(t) = -0'5\,(5t-30)e^{-t/8}$$

dlc

$$D'(26'91) = -1'808 \text{ cel/ml}\cdot(\text{día})$$

Observamos que el crecimiento es negativo, porque en ese momento el nº de celulas disminuye.

c)

$V(t)$: velocidad de crecimiento de las células tumorales tras t días

$X(t)$: densidad de las células tumorales tras t días sin quimioterapia em miles de cel/ml

$X(0) = 40$ mil cel/mil

$$X'(t) = V(t)$$

$$X(t) = \int V(t)\,dt$$

$$X(t) = \int 40e^{-t/8} = -320\cdot e^{-t/8} + C$$

$$\xrightarrow{X(0)=40} -320\cdot e^{-0/8} + C = 40$$

$$C = 40 + 320 = 360$$

$$X(t) = -320e^{-t/8} + 360$$

tras 2 semanas, 14 días

$$\boxed{X(14) = 30'4 \text{ mil cel/ml}}$$

Nombre y dni: ...María Arnaldos Carrillo... **B**

4.- En el proceso de descomposición del peróxido de hidrógeno H_2O_2, la concentración $P(t)$ de este compuesto tras t segundos cumple la ED

$$P'(t) = -r\,P(t)^2,$$

para una cierta constante $r > 0$. Si inicialmente la concentración es del 75%, y al cabo de 6 segundos baja al 50%,

1'9

a) Encuentra una expresión para $P(t)$ y determina el valor de r.

b) ¿Qué concentración habrá al cabo de 12 segundos? ¿Cuánto tiempo llevará rebajar la concentración al 25%?

Nota: 2 puntos

a) $P'(t) = -r\,P(t)^2$ $\qquad$ $P(t)$ = concentración de H_2O_2 tras t segundos ¿en %?

$\frac{dP}{dt} = -r\,P^2$

$\int \frac{dP}{P^2} = -r \int dt$

$\int \frac{dP}{P^2} = \int P^{-2}\,dP = \frac{P^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{P}$ ✓

$\frac{1}{P} = r\,t + c$ ✓

$P(0) = 75 \longrightarrow \frac{1}{75} = r \cdot 0 + c$

$c = \frac{1}{75}$ $\qquad$ Por atrás

$P(6) = 50 \longrightarrow \frac{1}{50} = re^6 + \frac{1}{75}$

$r = \frac{1/50 - 1/75}{e^6} = 1'65 \cdot 10^{-5}$

$P(t) = \frac{1}{1'65 \cdot 10^{-5}\,t + 1/75}$

b) en $t = 12$

$P(t) = \frac{1}{1'65 \cdot 10^{-5} \cdot 12 + 1/75} = 0'19\ \%$

busco t / $P(t) = 25$

$\frac{1}{25} = 1'65 \cdot 10^{-5}\,t + \frac{1}{75}$

$0'4338\,t = \frac{1}{25} - \frac{1}{75} = 0'0267$

$t = \frac{0'0267}{1'65 \cdot 10^{-5}} = -$

$P = 50$
$t = 6$ $\rightarrow$ $\frac{1}{50} = r \cdot 6 + \frac{1}{75}$

$r = \frac{1/50 - 1/75}{6} = \cancel{1'6525 \cdot 10^{-5}}$ 0'001111

0'0

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{\cancel{1'6525 \cdot 10^{-5}}\, t + 0'01333}}$$

0'00111

b)

busco P tras 12 segundos

$t = 12 \quad P(t) = \frac{1}{0'00111 \cdot 12 + 0'01333} = 37'5\,\%$

busco $t / P(t) = 25$

$\frac{1}{25} = 0'001111\, t + 0'01333$

$\boxed{t} = \frac{1/25 - 0'01333}{0'001111} = \boxed{24\ s}$