MATEMÁTICAS. $\quad$ 1º **Grado Bioquímica.**

HOJA 4: CRECIMIENTO EXPONENCIAL Y FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1. El *modelo exponencial*: si una población, inicialmente con N_0 individuos, crece un $\alpha\%$ cada año, entonces el número total de individuos tras t años viene dado por
$$y(t) = N_0 \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t .$$
Esta función se puede escribir también como $y(t) = N_0 e^{rt}$, tomando $r = \ln(1 + \frac{\alpha}{100})$.
Considerar tres poblaciones dadas por
$$y_1 = 100e^{2t}, \quad y_2 = 500e^{0'5t}, \quad y_3 = 1000e^{-t}.$$
   (i) Determina qué porcentaje crece al año cada una de las poblaciones.
   (ii) Determina cuánto tardan en duplicarse y_1 e y_2.
   (iii) ¿Cuándo se igualan las poblaciones y_1 e y_3? ¿Cuándo se tiene $y_3 = 10$.
   (iv) Representa en una misma gráfica y_1, y_2 e y_3. ¿Cuál tendrá más individuos a largo plazo?

2. Una población de bacterias se duplica cada 6 horas. Si inicialmente hay mil individuos, ¿cuántos habrá al cabo de t horas? ¿Cuándo se llegará al millón de individuos?

3. En presencia de un antobiótico, se observa que un cultivo de bacterias, inicialmente con cien mil individuos, decrece un 5% cada día.
   (a) Escribir el tamaño de la población como $y(t) = ae^{bt}$, calculando a y b.
   (b) Determina el número de individuos tras 4 días, y cuándo tarda la población en bajar a un cuarto de la inicial.
   (c) Determina en qué porcentaje baja la población al cabo de una semana, y cuántos individuos se pierden durante el séptimo día.

4. De cierto material radioactivo se sabe que se desintegra un 20% cada 10 años. ¿Qué porcentaje del material inicial quedará al cabo de 20 años? ¿Cuántos años tardará en desintegrarse un 80% del material inicial?

5. El ^{14}C tiene una semivida de 5730 años. En una reciente excavación se ha hallado un hueso fosilizado cuyo contenido en ^{14}C es de sólo un 1% respecto a la cantidad que se encuentra en un hueso similar de un ser vivo. Determina la edad del fósil.

6. El Yodo 131 es radiactivo y tiene una semivida de 8 días. En una prueba médica un paciente ingiere una dosis inicial de ^{131}I que emite 100 milicuries (mCi), y que se acumula de forma natural en su tiroides. ¿Qué emisión de ^{131}I producirá el paciente al cabo de una semana? ¿Cuándo estarán las emisiones por debajo de 5 mCi?

7. a) La política seguida en una reserva natural para proteger al muflón resulta un éxito, y cada año la población se incrementa en un 8%. Si al iniciar el programa se contaba con 200 ejemplares, ¿cuál es la población estimada al cabo de 30 años?
   b) ¿Cuál tendría que haber sido el porcentaje de crecimiento anual para que en ese período la población no superara los 1000 ejemplares?

8. En un laboratorio se observa que la concentración de hemoglobina en un cultivo disminuye en una proporción fija por unidad de tiempo. A las 7 de la mañana medimos una concentración de 15 *ppm* (partes por millón). Media hora más tarde la concentración ha bajado un 1% respecto a la anterior.
   a) Escribir la función que expresa la concentración de Hb en función del tiempo.
   b) ¿Qué concentración había a las 3:30 AM, antes de que hiciésemos nuestra primera medición?
   c) ¿Cuanto tardará en bajar la concentración hasta 3 *ppm*?

9. Se ha observado que la cantidad de basura generada por una gran ciudad aumenta un 5% cada año. Se construye un vertedero, inicialmente vacío, en el que el primer año se depositan 1000 toneladas de basura. Como la basura no se retira, se va acumulando en años posteriores.

   a) Describir la función $x(n) =$ cantidad de basura generada por la ciudad durante el año n.

   b) Determinar la cantidad de basura acumulada en el vertedero al cabo de n años.

   c) Si la capacidad del vertedero son 90.000 Tm de basura, calcular cuántos años han de pasar para que el vertedero se llene.

10. Un laboratorio dispone de 1000 ejemplares de *E. Coli*. La población crece de forma natural un $0'5\%$ cada día. Por otro lado, al final del día se extraen para uso médico k ejemplares de *E. Coli*.

    a) Si $k = 10$, determina el número de ejemplares al cabo de 24 días.

    b) Si seguimos extrayendo $k = 10$, ¿cuánto durarán las existencias de *E. Coli*?

    c) ¿Qué valor de k deberíamos usar para que la población tras 24 días sea de 500 ejemplares?

11. Cada 6 horas tomamos 20 miligramos de un medicamento y cada 6 horas el cuerpo elimina una quinta parte de lo que tiene.

    a) ¿Cuántos miligramos de medicamento tendremos inmediatamente después de tomar la tercera dosis?

    b) Encuentra una expresión para los miligramos de medicamento en el organismo en función del tiempo (tomando como unidad de tiempo los intervalos de 6 horas).

    c) A largo plazo, ¿cuál será la cantidad de medicamento en el organismo?

12. En cierto cultivo de bacterias se observa que la población crece un 5% cada hora, a partir de una población inicial de 1000 individuos.

    a) Escribir una fórmula para el número de bacterias tras n horas. ¿Cuándo se alcanzará el millón de individuos?

    b) Se quiere probar un antibiótico, del que se sabe que cada dosis elimina 200 bacterias. Si al cultivo anterior le aplicamos una dosis de antibiótico cada hora, escribe una fórmula para el número de bacterias tras n horas. ¿Cuánto tardará en desaparecer la población de bacterias?

13. El número de individuos en poblaciones con recursos limitados se suele modelizar con una *función sigmoide* (o logística):

    $$f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-rt}}, \quad t \in (0, \infty), \quad \text{donde } a, k, r \text{ son ctes } > 0.$$

    a) Representa las funciones $f_1(t) = \dfrac{150}{1 + 2e^{-t}}$ y $f_2(t) = \dfrac{150}{1 + 2e^{-2t}}$ para $t > 0$.

    b) ¿En qué tamaño tienden a estabilizarse las poblaciones? ¿Cuándo se alcanza el 90% de dicho tamaõ?

    c) Dibuja las gráficas de las *velocidades de crecimiento*, $f_1'(t)$ y $f_2'(t)$, y determina en qué instante alcanzan su máximo.

14. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

    $$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \leq t < \infty,$$

    donde t representa el tiempo en semanas.

    a) Representar la función.

    b) Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.

    c) Hallar el instante en que la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima.

15. En las pruebas de un medicamento antiviral, se observa que la concentración de virus V (en mgr/ml) desciende rápidamente, pero luego vuelva a repuntar. La función que describe, aproximadamente, la evolución de V en función del tiempo (en horas) es:

$$V(t) = \frac{5t^2 - 5t + 10}{t^2 + 1}, \text{ para } t \geq 0.$$

a) Esboza la gráfica de $V(t)$. ¿Qué concentración de virus había al comenzar el problema? ¿En qué valor se estabiliza a largo plazo?

b) ¿Cuándo tarda en hacerse mínima la concentración de virus, y cuál es su valor en ese momento?

c) ¿A qué velocidad crece la población de virus al cabo de 3 horas?

16. Se está estudiando la capacidad de reproducción de una especie de aves en una isla. Si d = densidad de aves (en parejas/m^2) y B = número medio de descendientes por pareja, se observa aproximadamente la relación

$$B = 4 + 2d - 2d^2.$$

a) Dibujar la gráfica de $B(d)$.

b) Hallar d que maximiza el número de descendientes por pareja, y el valor de dicho máximo.

c) Hallar d que maximiza el número de descendientes por m^2, y el valor de dicho máximo.

d) En un islote de 16 m^2, ¿qué número de descendientes habrá en cada caso?

17. Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico (Y) de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses), y se observa que se ajusta razonablemente a la función:

$$y = f(t) = 4\ln(t+1) - 5\ln(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento? ¿Puede ser $f(t) = 0$?

b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?

c) Hacer una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período [0, 24] (los dos primeros años).

18. En un estudio sobre cierta infección microbiana se observa que el número de microbios (en miles) en una placa de Petri se ajusta aproximadamente a la curva $N(t) = 10\,te^{-3t}$, donde t es el tiempo en días.

(a) Dibuja la gráfica de $N(t)$ ¿Cuándo alcanza la población microbiana su tamaño máximo? ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿Hay algún punto de inflexión?

(b) Si la velocidad de infección de tejido sano es de aproximadamente $30\mu m^2$ al día por cada mil microbios, calcular la extensión total de tejido infectado en los primeros 2 días.

19. a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \ln(1+x)$ alrededor de $x = 0$, y compara el valor exacto y el aproximado para $x = 0'05$. ¿Para qué valores de x podemos decir que $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$ con error menor que 10^{-3}?

b) Los modelos exponenciales con crecimiento anual del $\alpha\%$, se pueden escribir como $x(t) = x(0)e^{rt}$, donde $r = \ln(1 + \frac{\alpha}{100})$ se denomina *tasa de crecimiento instantánea*. ¿Es correcto decir que $r \approx \alpha/100$? ¿Para qué valores de α podemos garantizar que $|r - \alpha/100| \leq 10^{-3}$?

20. Se estudia el comportamiento de la función de Michaelis-Menten $V = S/(0'5 + S)$ para concentraciones pequeñas de sustrato S.

a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de V alrededor de $S = 0$, representando ambas gráficas.

b) Usar el polinomio de grado 2 para calcular el valor aproximado de V cuando $S = 0'10$. ¿Qué margen de error se comete?

Ejercicios complementarios para practicar con ordenador

21. Se está estudiando la concentración en sangre de dos medicamentos A y B tras ser administrados a un paciente. Experimentalmente se observa que las concentraciones se ajustan a las curvas

$$A(t) = 300 \cdot 0.8^t \qquad B(t) = 250 \cdot 0.9^t \qquad t \geq 0$$

con $t =$ tiempo (en horas) desde la administración del medicamento.

(a) Esboza en una misma gráfica $A(t)$ y $B(t)$, y determina cuándo se igualan las concentraciones.

(b) A largo plazo, ¿cuál de los medicamentos tiene mayor concentración en sangre? ¿Cuándo se alcanza una concentración igual a 200 para cada uno de los medicamentos?

(c) Dibuja la gráfica de $B(t) - A(t)$, especificando las regiones de crecimiento, concavidad y el comportamiento a largo plazo. ¿Cuál es la diferencia máxima de concentraciones entre los dos medicamentos?

22. En una reacción química $X + Y \to Z$ se observa que las cantidades de reactivos X e Y (en mM) tras t segundos vienen dadas respectivamente por

$$X(t) = 500 \cdot e^{-t/2} \qquad Y(t) = \frac{300}{1 + 0'4t^2} \qquad t \geq 0$$

(a) Esboza en una misma gráfica $X(t)$ e $Y(t)$.

- ¿Cuánto debemos esperar para que las cantidades de ambos productos estén por debajo de 150 mM?
- ¿Cuál de los productos llegará antes a los 150 mM?
- Después de mucho tiempo, ¿de cuál de los productos habrá mayor cantidad?

(b) Dibuja la gráfica de $X(t)/Y(t)$.

- ¿Cuándo será máxima la ratio X/Y y qué ocurre a largo plazo?
- ¿Cuándo será X la mitad que Y?
- Determina en qué períodos de tiempo la ratio crece y en cuáles decrece.

23. Se tiene una disolución ácida a la que se va agregando progresivamente una base fuerte ($NaOH$). Se observa que el pH de la disolución aumenta con el volumen V de $NaOH$ (en ml) según la función

$$pH(V) = 2 + \frac{12}{1 + 100e^{-2V}}, \quad V \geq 0.$$

(a) Dibuja la curva.

(b) ¿Cuál es el pH máximo para esta disolución? ¿A partir de que V nos acercamos a un 90% del pH máximo?

(c) Se considera que la base "neutraliza" al ácido en el punto de inflexión de la curva. Determina el valor de V y pH en dicho punto. Calcula el valor de $pH(V/2)$ (denominado pH de semineutralización).

(d) Esboza la gráfica de la derivada de $pH(V)$. ¿Con qué velocidad aumenta el pH cuando $V = 1$? ¿Cuál es la velocidad máxima de aumento de pH, y para qué volumen se alcanza?

(e) Para ciertos compuestos (ácidos dipróticos) dichas curvas pueden tener varios puntos de inflexión. Calcula los puntos de inflexión cuando la relación es

$$pH(V) = 2 + \frac{8}{1 + 100e^{-2V}} + \frac{4}{1 + 300e^{-10V}}.$$

Dibujando la gráfica de $(pH)'(V)$, determina qué puntos de inflexión corresponden a máximos de ésta, y calcula los pH asociados (llamados pH de "neutralización" del ácido).

24. En un estudio sobre la absorción del O_2 en la sangre y su transporte a los tejidos, se consideran 2 funciones

$$\mathrm{Mb}(P) = \frac{P}{k_1 + P}, \quad \mathrm{Hb}(P) = \frac{P^3}{k_2^3 + P^3},$$

que corresponden respectivamente al nivel de saturación de la mioglobina (Mb) y la hemoglobina (Hb), cuando P es la presión parcial de O_2 en sangre (en mm Hg).

(i) Justifica por qué las constantes k_1 y k_2 se denominan presiones de semisaturación.

(ii) Dibuja $\mathrm{Mb}(P)$ y $\mathrm{Hb}(P)$ en un mismo gráfico cuando $k_1 = 5$ y $k_2 = 30$.

(iii) Determina qué proporción de O_2 transporta cada proteína desde los pulmones a los tejidos, si en los primeros $P = 100$ mm Hg, y en los tejidos $P = 40$ mm Hg.

(iv) ¿A qué presión se satura cada proteína al 90%? ¿A qué presión es máxima la velocidad de absorción de O_2?

25. El nivel de saturación de la Hb cuando la presión parcial de O_2 en el torrente sanguíneo es P viene dado por

$$\Theta(P) = \frac{P^n}{k^n + P^n},$$

para dos constantes positivas k (constante de semisaturación) y n (exponente de Hill). Experimentalmente se recogen los siguientes datos

P	15	30	45	60	75	90	105	120
Θ	0.13	0.5	0.76	0.87	0.93	0.96	0.97	0.98

(i) Utilizando el cambio de variable $U = \log P$ y $V = \log \frac{\Theta}{1-\Theta}$, ajusta los datos a una recta $V = a + bU$, y evalúa la bondad del ajuste.

(ii) Deshaz el cambio de variable, y estima los valores de k y n.

26. Las siguientes funciones miden las proporciones de las distintas especies que aparecen al descomponer un ácido diprótico en una disolución

$$A(x) = \frac{x^2}{x^2 + k_1 x + k_1 k_2}, \quad B(x) = \frac{k_1 x}{x^2 + k_1 x + k_1 k_2}, \quad C(x) = \frac{k_1 k_2}{x^2 + k_1 x + k_1 k_2},$$

donde k_1, k_2 son ctes positivas, y $x = [H^+]$ es la concentración de iones en la disolución.

a) Comprueba que $A(x) + B(x) + C(x) = 1$.

b) Para $k_1 = 10^{-2}$ y $k_2 = 10^{-3}$, dibuja las 3 curvas en una misma gráfica, y explica qué sucede a cada compuesto al variar la concentración de $[H^+] = x$ entre 0 y 0'1.

c) Repite el apartado b) pero usando escala logarítmica en x.

d) Lo mismo que b) pero cambiando la variable $x = 10^{-p}$, para valores de p entre[1] 0 y 5.

e) Con el cambio de variable en d), determina los valores de p donde A coincide con B, y B coincide con C (denominados *pK's del ácido*).

f) ¿Qué proporción de cada producto hay cuando el pH es 3'5? ¿Qué pH debería tener la disolución para que haya un 90% de la especie C?

g) Haz un análisis similar a (d) para obtener los diagramas de equilibrio del ácido carbónico H_2CO_3, para el que las constantes valen $k_1 = 4'4 \cdot 10^{-7}, k_2 = 4'7 \cdot 10^{-11}$. ¿Qué proporción de cada producto hay cuando el pH es 7? ¿Entre qué pHs debería estar la disolución para que haya más de un 60% de la especie B (anión bicarbonato HCO_3^-)?

[1] Observa que $p = -\log_{10} x = -\log_{10}[H^+]$ es el pH de la disolución.