MATEMÁTICAS. 1^o **Grado Bioquímica.**

HOJA 5B: Curvas normal y t-Student. Intervalos de confianza

1. La curva normal de media μ y desviación típica σ se define como
$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dibuja en una misma gráfica las curvas normales con $\mu = 3$, cuando $\sigma = 1$, $\sigma = 4$ y $\sigma = 0'4$
   (b) Comprueba que los puntos de inflexión de f son $x = \mu \pm \sigma$, y que se cumple
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\mu,\sigma)dx = 1.$$
   (c) En el caso $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (normal estándar), define la función de probabilidad acumulada
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t,0,1)\, dt.$$
   Dibuja su gráfica. Utilizando el comando de derivación, comprueba que $F'(x) = f(x)$.

2. La puntuación en los tests IQ se corresponde con una variable aleatoria $X \sim N(\mu = 100, \sigma = 15)$. Utilizando los comandos

   `pdf_normal`, `cdf_normal`, `quantile_normal`

   a) dibuja la gráfica de la función de densidad de X

   b) calcula $P\big(90 \le X \le 110\big)$, $P\big(X \ge 125\big)$, $P\big(X \le 70\big)$

   c) determina los valores de X que corresponden a los siguientes casos

   1% superior, 33% superior, 25% central, entre 2.5 y 5% inferior

3. Decimos que $X \sim \mathtt{T}_m$ es una t-Student de grado m, si su función de densidad es
$$f_m(x) = \frac{c_m}{(1+\frac{x^2}{m})^{\frac{m+1}{2}}}, \quad x \in \mathbb{R},$$
   donde la constante $c_m > 0$ es tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)\, dx = 1$.
   (a) Calcula el valor de c_m para $m = 10$.
   (b) Utilizando `pdf_student_t`, dibuja en una misma gráfica las funciones $f_m(x)$ para $m = 5, 10, 20$, junto con la normal estándar
   (c) Calcula las probabilidades $P\big(-1 \le X \le 1\big)$, $P\big(-2 \le X \le 2\big)$ y $P\big(-3 \le X \le 3\big)$, para $m = 5$ y $m = 20$
   (d) Calcula los percentiles $t_{0.95}^{(m)}$ para $m = 5, 10, 20$, así como para la normal estándar $z_{0.95}$

4. La concentración de CO_2 en la atmósfera (en ppm), medida en una estación metereológica, se comporta como $X \sim N(\mu, \sigma = 30)$. Una muestra reciente de $n = 25$ mediciones arroja el dato
$$\bar{x} = 415 \text{ ppm}$$
   Encontrar intervalos de confianza para μ al 95% y al 99%. ¿Podemos afirmar con estos datos que se ha incrementado el valor de $\mu = 370$ que había en el año 2000?

5. Se diseña un experimento para determinar el porcentaje de agua X en una solución de metanol. En el laboratorio se obtienen los siguientes datos de un conjunto de $n = 10$ muestras

   0.50, 0.55, 0.53, 0.56, 0.54, 0.57, 0.52, 0.60, 0.55, 0.58

   Suponiendo que $X \sim N(\mu, \sigma)$, con μ, σ desconocidos, usa esos datos para calcular la media y desviación típica muestral, $\bar{x}$ y s_n, y obtén intervalos de confianza al 95% y al 99% para el valor real de μ.

6. Se mide la turbidez X del agua en una laguna cercana (en unidades FTU), obteniendose los datos

   6.40, 4.78, 4.41, 4.38, 5.74, 5.85

   a) Suponiendo que $X \sim N(\mu, \sigma)$, con μ, σ desconocidos, calcula un intervalo de confianza al 90% para μ. ¿Hay evidencia suficiente para garantizar, con confianza 90%, que la turbidez media actual μ es superior a 5?

   b) Repetir el análisis anterior, suponiendo ahora que se toman $n = 27$ datos y se obtiene $\bar{x} = 5'2$ y $s_n = 0'6$.