Matemáticas. 1º Bioquímica. 14/1/2021

Nombre y dni: SOLUCIONES

1. Estudiamos las horas de vida de una especie de insectos bajo ciertas condiciones de cultivo.

   a) Para un grupo pequeño de 12 muestras, los resultados fueron:

   $$20, 25, 13, 18, 32, 25, 20, 15, 28, 40, 26, 23$$

   Dibuja un diagrama de tallos y hojas (en grupos de 5 horas). Determina el tiempo mediano de vida, los cuartiles, así como la presencia de datos atípicos. Dibuja a mano el box-plot de los datos, y explica lo que observas.

   b) En una muestra mucho mayor, nos presentan los datos resumidos de la siguiente forma:

Percentil	20	40	50	60	80	100
Tiempo (horas)	18	23	24	27	34	42

   Dibuja un histograma de densidades, elaborando previamente una tabla con las clases, marcas de clase, frecuencias, alturas, etc... Calcula la media $\bar{x}$ a partir de la tabla. ¿Es mayor o menor que la mediana?

   Nota: 2'5 puntos

a)

1	3
1	8 5
2	0 0 3
2	5 5 8 6
3	2
3	
4	0

$M = \frac{x_6 + x_7}{2} = 24$

$Q_1 = \frac{x_3 + x_4}{2} = 19$

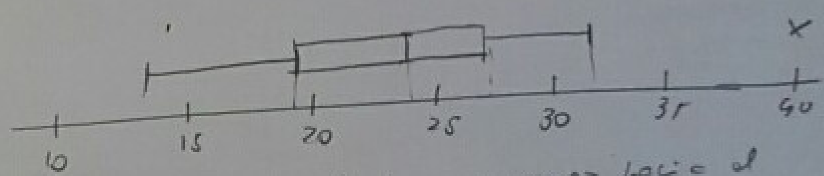
$Q_3 = \frac{x_9 + x_{10}}{2} = 27$

$\rightarrow RI = 27 - 19 = \underline{\underline{8}}$

$\frac{3}{2} RI = 12$

$IT = [19-12, 27+12] = [7, 39]$

$\rightarrow$ 40 es dato atípico



Se observa asimetría, con sesgo hacia el lado dcho.

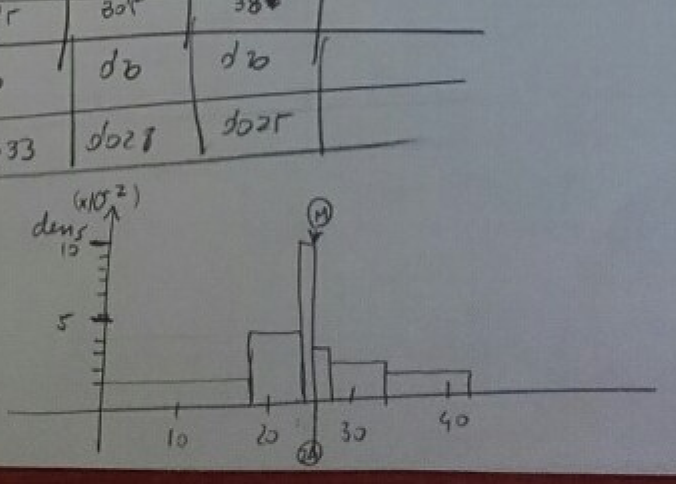
b)

horas	[0, 18)	[18, 23)	[23, 24)	[24, 27)	[27, 34)	[34, 42)
pto medio → m_i	9	20'5	23'5	25'5	30'5	38
f_i	0'20	0'20	0'10	0'10	0'20	0'20
$\frac{f_i}{l_i} = h_i$	0'011	0'04	0'10	0'033	0'028	0'025

$\bar{x} = m_1 \cdot f_1 + \dots + m_k f_k$

$= 9 \cdot 0'20 + 20'5 \cdot 0'20 + \dots = 24'5$

$M = 24 \Rightarrow \bar{x} > M$



2. Se estudia la relación entre el consumo diario X de NaCl y la probabilidad p de desarrollar hipertensión. Se lleva a cabo un experimento aplicando 10 dietas diferentes a grupos de 20 ratones, obteniéndose los datos

X (mgr/día)	5	12	15	18	20	25	30	35	40	50
p	0.10	0.30	0.40	0.50	0.65	0.80	0.90	0.95	0.95	1

El modelo teórico sugiere ajustar los datos a una curva logística

$$p = \frac{1}{1 + \exp(-a - bX)}, \tag{$\star$}$$

para valores de a y b a determinar.

(i) Representa los datos[1] $\left(X, \ln \frac{p}{1-p}\right)$, calcula su recta de regresión y el coeficiente r.

(ii) Sabiendo que ($\star$) se puede escribir como $\ln \frac{p}{1-p} = a + bX$, utiliza el apartado (i) para estimar el valor de los parámetros a y b.

(iii) Representa en una gráfica los datos originales (X, p) y la curva que has obtenido en (i)+(ii), y describe si te parece un buen ajuste. ¿Qué pronóstico se obtiene para $X = 50$?

(iv) Utiliza el método de mínimos cuadrados (con `tol`=0'0001) para dar otra estimación de a y b. ¿Qué ajuste te parece mejor?

(v) ¿Qué consumo X de NaCl pronosticarías para tener probabilidad inferior al 35% de hipertensión?

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad de las gráficas dibujadas con Maxima (escala correcta, unidades en los ejes, etc...)

(i) Maxima $\to$ $y = \ln \frac{p}{1-p}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = -2'713 + 0'155 \cdot X}$ con $r = 0'988$

↑ ajuste razonable, con ptos extremos un poco por debajo de la recta

(ii) $\boxed{a = -2'713}$, $\boxed{b = 0'155}$

(iii) ver Maxima

$$\boxed{p = \frac{1}{1 + e^{2'713 - 0'155 \cdot X}}}$$ ← ajuste razonable, pero no perfecto

$X = 50 \longrightarrow \hat{p} = 0'9936 \to$ 99'36 % de desarrollar hipertens

(iv) Maxima $\longrightarrow$ $\boxed{a = -2'9927, \quad b = 0'1737}$

↳ este ajuste es claramente mejor, tocando esencialmente a todos los puntos

(v) $p = 0'35 \longrightarrow \hat{X} = \frac{1}{b}\left(\ln \frac{p}{1-p} - a\right) \underset{(iv)}{=} 13'663$ mgr $\frac{\text{NaCl}}{\text{día}}$ //

[1]En el apartado (i) tendrás que eliminar el último dato ($X = 50, p = 1$) para poder hacer regresión lineal. En el apartado (iv), sin embargo, puedes (y debes) usar todos los datos.

3. El peso en gramos, W, de una hembra de ratón criada bajo condiciones de laboratorio, se mide durante un período de un año (52 semanas), y se obtiene que, en función de la edad en semanas, t, el peso viene dado por la siguiente función

$$W(t) = \frac{26}{1+30e^{-\frac{2}{3}t}}, \quad 0 \le t \le 52.$$

(a) Dibujar la curva de crecimiento del animal, es decir, la gráfica de la función de peso.

(b) Hallar cuándo alcanza el 80% de su peso durante ese período.

(c) Se llama "tasa de crecimiento" a la función derivada $W'(t)$. Determinar los intervalos de crecimiento de esta función, y comprobar que alcanza un máximo. ¿Cuándo se alcanza y qué valor toma dicho máximo?

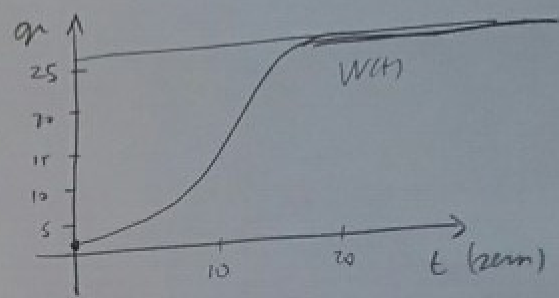
(d) Se llama "tasa de crecimiento relativo" a la función $\frac{W'(t)}{W(t)}$. Comprobar que se cumple la ecuación

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{W(t)}{26}\right)$$

Comprobar también que la tasa de crecimiento relativo es siempre decreciente.

(e) Si la velocidad instantánea de alimento que consume cada ratón es la mitad de su peso, es decir $V(t) = W(t)/2$ (en gr/sem), calcula la cantidad total de alimento que consume a lo largo del año.

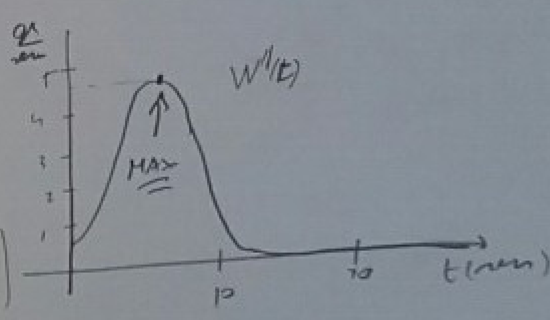
Nota: 3 puntos



a) Curva logística
Lo dibuja en Maxima

b) Busco t / $W(t) = 0'80 \cdot \underbrace{26}_{\text{peso máximo}}$

$\xrightarrow{\text{Maxima}}$ $\boxed{t = 7'17 \text{ semanas}}$



c) $W'(t) \to$ calculada y dibujada en Maxima

Maximo en $\boxed{t = 5'10 \text{ sem}, \ W(5'10) = 4'3 \ \frac{gr}{sem}}$

(0, 5'10)	(5'10, ∞)
crec ↗	decrec ↘

d) La igualdad se comprueba con Maxima
El decrecim de $\frac{W'}{W}$ se puede ver de varias formas →

- Dibujando $\frac{W'}{W}$ o bien $\frac{2}{3}\left(1-\frac{W}{26}\right)$
- Derivando y viendo que $\left(\frac{W'}{W}\right)' > 0$
- Como $W' \nearrow \Rightarrow \frac{2}{3}\left(1-\frac{W}{26}\right) \searrow$

e) Pide $\int_0^{52} V(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{52} W(t)dt = 609 \ gr$ //
Maxima

4. En un paciente con leucemia se ha observado una disminución semanal del leucocitos en sangre del 2%. Se le somete a un tratamiento que aumenta su nivel de leucocitos en 80 unid/$\mu\ell$ cada semana. Al inicio del tratamiento su nivel de leucocitos era de 3500 unid/$\mu\ell$.

a) Plantea y resuelve la ecuación diferencial correspondiente a $x(t)$ = nivel de leucocitos en sangre (en unid/$\mu\ell$) tras t semanas.

b) Determina el nivel de leucocitos tras 12 semanas, así como la cantidad a largo plazo. Esboza la gráfica de $x(t)$.

c) ¿Cómo habría que modificar el tratamiento para que llegue a un nivel de 4500 unid/$\mu\ell$ en 12 semanas?

Nota: 2 puntos

a) $x(t)$ = leucocitos en sangre tras t semanas (en unid/$\mu\ell$)

→ 80 unid/$\mu\ell$; 2%

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -0'02 \cdot x(t) + 80 \\ x(0) = 3500 \end{cases}$$

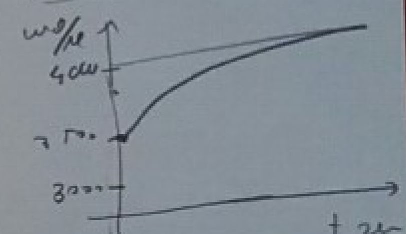
→ Busco x_{eq} : $0 = -0'02\, x_{eq} + 80 \Rightarrow x_{eq} = 80 \cdot 50 = 4000$ ($0'02 = \frac{1}{50}$)

$$\Rightarrow x(t) = 4000 + C e^{-0'02t}$$

$$\xrightarrow{t=0} 3500 = 4000 + C \to C = -500$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 4000 - 500 e^{-0'02t}}$$

b) $x(12) = 3606'7$



c) Busco α / $\begin{cases} x'(t) = -\frac{2}{100} x(t) + \alpha \\ x(0) = 3500 \end{cases}$ cumple $x(12) = 4500$

→ resuelvo con x_{eq} → $0 = -\frac{1}{50} x_{eq} + \alpha \Rightarrow x_{eq} = 50\alpha$

$$\Rightarrow x(t) = 50\alpha + C e^{-t/50} \xrightarrow{t=0} 3500 = 50\alpha + C$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 50\alpha + (3500 - 50\alpha) e^{-t/50}}$$

$$\xrightarrow{t=12} 4500 = 50\alpha + (3500 - 50\alpha) e^{-12/50}$$

$\xrightarrow{\text{Resuelvo}}$ $\boxed{\alpha = 163'73 \text{ unid}/\mu\ell}$