Matemáticas. 1º Bioquímica. Convocatoria Diciembre, 16/12/2021

Nombre: SOLUCIONES ....

2'3	2'5	2'7	2

1. Estudiamos la eficiencia de un fertilizante, midiendo para ello la altura (en cms) alcanzada por varios grupos de plantas

   a) Para dos grupos pequeños de 11 muestras los resultados fueron:

Grupo 1	55	71	39	43	53	41	89	45	47	34	66
Grupo control	24	9	33	26	21	32	60	28	17	16	37

   Dibuja a mano un diagrama de tallos y hojas conjunto (en grupos de 10 unidades). Para el Grupo 1, determina la altura mediana, los cuartiles y los datos atípicos. Dibuja con Maxima el box-plot conjunto, y explica lo que observas.

   b) Para un grupo de 200 plantas se obtienen los siguientes datos agrupados

Altura	[0,16)	[16,32)	[32,40)	[40,48)	[48,64)	[64,80]
nº individuos	14	83	50	31	20	2

   Dibuja un histograma de densidades a mano, completando previamente la tabla con las marcas de clase, frecuencias y alturas. Calcula la mediana M en este caso.

   Nota: 2'5 puntos

   Observación: en a) se valorará la calidad del box-plot dibujado con Maxima (escala correcta, datos atípicos, etc...)

a)

Grupo 1		Grupo control
	0	9
	1	6 7
	2	1 4 6 8
9 4	3	2 3 7
7 5 3 1	4	
5 3	5	
6	6	0
1	7	
9	8	

- Altura mediana (con maxima) = 47 cm.
- Cuartiles: $Q_1 = 42$ cm
  $Q_3 = 60{,}5$ cm
- Rango intercuartílico: $R_I = Q_3 - Q_1 = 18{,}5$

Para ver los datos atípicos buscamos el intervalo típico: $[Q_1 - 1{,}5 \cdot R_I , Q_3 + 1{,}5 \cdot R_I] \rightarrow$

$\rightarrow I_T = [14{,}25 ; 88{,}25] \rightarrow$ Por tanto, el dato "89 cm" es un dato atípico al hallarse fuera del intervalo típico.

- Tras representar el box-plot en wxMaxima, podemos observar que el Grupo 1 tiene el 50% de sus datos repartidos entre 42cm y 60,5cm, y siendo la mediana 47cm. Se puede notar un sesgo de los datos hacia la derecha, además de un dato atípico que hemos averiguado anteriormente. Los datos se encuentran relativamente dispersos, con un coeficiente de variación de 29,53% respecto a la media.
En cuanto al Grupo Control, podemos observar unos datos mucho más concentrados que en el primer caso, y con un dato atípico también (60cm, claramente visible en el stem-plot).

b)

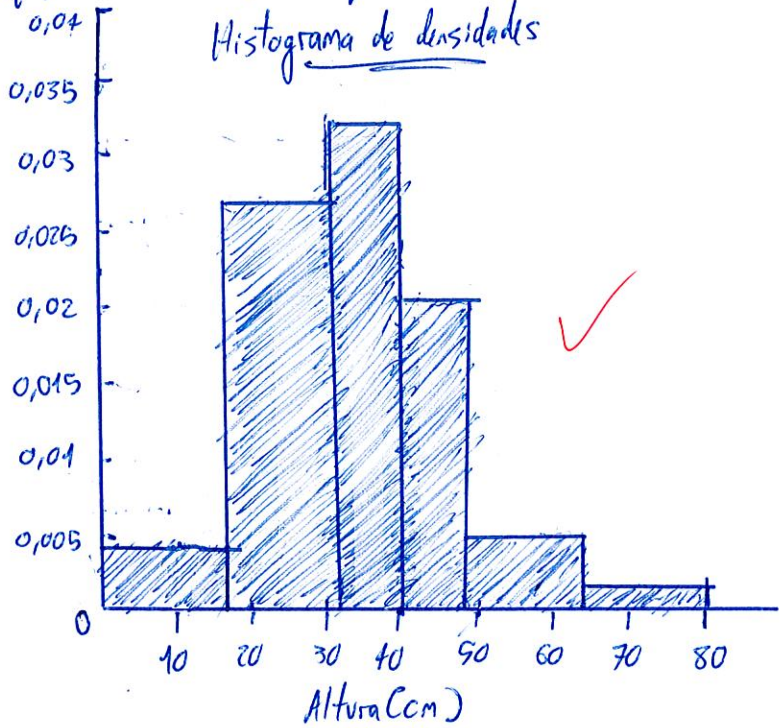
	[0,16)	[16,32)	[32,40)	[40,48)	[48,64)	[64,80)
n_i	14	83	50	31	20	2
f_i	0,07	0,415	0,25	0,155	0,1	0,01
h_i	0,00438	0,02594	0,03125	0,01938	0,00625	0,00063
m_i	14	24	36	44	56	72

$f_i = \frac{n_i}{n_{total}}$

$h_i = \frac{f_i}{Long(I_i)}$

Mediana (con maxima) = 36 cm

mal



2. Se realiza una experimento para medir los parámetros de Michaelis-Menten en una reacción enzimática, obteniéndose los siguientes datos experimentales para (S, V)

S	0.2	0.6	1	2	5	10	20	35
V	31	66	85	112	134	147	156	157

(i) Representa los datos $(V/S, V)$, y dibújalos junto con su recta de regresión.

(ii) Usando que $V = a - b\frac{V}{S}$, estima el valor de los parámetros a y b

2'5

(iii) Representa en una gráfica los datos originales (S, V) y la curva de Michaelis-Menten $V = aS/(b + S)$, con los parámetros a, b obtenidos en (ii). Describe la calidad del ajuste.

(iv) Utiliza mínimos cuadrados para dar otra estimación de a y b, con tol=0'0001. En un mismo gráfico, compara esta curva con la obtenida en (iii) y decide qué ajuste parece mejor.

(v) ¿Para qué valor de S se alcanza un 80% de la velocidad máxima de la enzima?

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad de las gráficas dibujadas con Maxima (escala correcta, etiquetas en los ejes, etc...)

(i) Hecho en maxima. $V = 159{,}5428 - 0{,}8446 \cdot u$ $\left\{\begin{matrix} V = V \\ u = V/S \end{matrix}\right\}$

(ii) $a = 159{,}5428$

$b = 0{,}8446$ (aparece como $-b$)

(iii)

$$V = \frac{a \cdot S}{b+S} \longleftarrow V = \frac{159{,}5428 \cdot S}{0{,}8446 + S}$$ Gráfica en maxima.

El ajuste es bastante bueno, con un coeficiente de correlación $r = 0{,}9989$ bastante fuerte.

(iv) Tras realizarlo en maxima $\longrightarrow \left\{\begin{matrix} a = 160{,}5946 \\ b = 0{,}8767 \end{matrix}\right\}$

Este ajuste coincide mejor con los puntos dados.

(v)

La velocidad máxima es el parámetro a. ~~Por~~ Por tanto, el 80% de a es 128,4756.

Para averiguar el valor de $S \to 128{,}4756 = \frac{160{,}5946 \cdot S}{0{,}8767 + S} \longrightarrow S \approx 3{,}5068$

3. El número de bacterias (en millones de individuos) de un determinado cultivo de laboratorio sigue la ley $n(t) = \frac{40}{1+79e^{-t}}$ donde t es el tiempo medido en días.

(a) Representa gráficamente la función $n(t)$ y determina su valor a largo plazo.

(b) ¿En qué instante se alcanzan los 10 millones de bacterias?

(c) Dibuja la gráfica de $n'(t)$. ¿En qué instante es máxima la velocidad de crecimiento de la población? ¿Qué número de bacterias se ganan por día en ese instante?

(d) Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 entorno al origen de la función $n(t)$ y dibújalo junto a la gráfica de $n(t)$ para $t \in [0, 5]$.

(e) Calcula el área encerrada por la gráfica de $n'(t)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 1]$. ¿Qué interpretación tiene este valor, en términos de la población de bacterias?

Nota: 3 puntos

a) * Gráfica realizada en maxima.

El valor a largo plazo será $\lim_{t \to +\infty} (n(t)) = 40$ millones de individuos. ✓ 0.6

b) Instante en el que se alcanzan los 10 millones $\rightarrow n(t) = 10 \rightarrow t \simeq 3,27$ días. ✓ 0.6

Los 10 millones de individuos se alcanzarán aproximadamente en los 3,27 días (78,48 horas).

c) $n'(t) = \frac{3160 \cdot e^{-t}}{(79 \cdot e^{-t}+1)^2}$. Para determinar un máximo/mínimo, igualamos la derivada de la función a 0. Como la función es una derivada, haremos la derivada segunda.

$n''(t) = \frac{499280 \cdot e^{-2t}}{(79 \cdot e^{-t}+1)^3} - \frac{3160 \cdot e^{-t}}{(79 \cdot e^{-t}+1)^2} = 0 \rightarrow t = \log(79) \simeq 4,37$ días $= 104,88$ horas ✓

El número de bacterias ganadas en ese instante será: $n(4,37) \simeq$ ~~20~~ millones de individuos en ese instante.

NO $n'(4.37)$ −0.3

0.5

d) $n(t) = \frac{40}{1+79 \cdot e^{-t}} \rightarrow n(0) = 0,5 \rightarrow$ Origen de $n(t) = 0,5$

$P_4(x) = f(0,5) + \frac{f'(0,5)}{1} \cdot (x-0,5) + \frac{f''(0,5)}{2!} \cdot (x-0,5)^2 + \frac{f'''(0,5)}{3!} \cdot (x-0,5)^3 + \frac{f''''(0,5)}{4!} \cdot (x-0,5)^4$?

* El Polinomio completo está escrito en maxima.

0.5

Error: $|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \rightarrow \frac{M}{5!} \cdot (0-0,5)^5 \rightarrow$ Error $= 8,3317 \cdot 10^{-5}$
(valor absoluto)

$M = \max_{c \in [0;0,5]} |f'''''(c)| \simeq 0,3199$

Evaluamos en 0 porque necesitamos un denominador más pequeño, pues buscamos un máximo.

e) El área entre $n'(t)$ y el eje OX en el intervalo $[0,3]$

$$\int n'(t)\,dt = n(t) = \frac{40}{79\cdot e^{-t}+1}$$

• Hacemos la integral definida entre $[0,1]$:

$\int_0^1 n'(t)\,dt \simeq 0{,}8306\ u^2$. Esto quiere decir que en el primer día habrá un crecimiento de 830.600 individuos. ✓

4. Una solución de salmuera fluye a razón de $6\,L/\text{min}$ hacia el interior de un depósito que inicialmente contiene $50\,L$ de solución en la cual se disolvieron $5\,kg$ de sal. La solución contenida en el depósito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior con la misma rapidez. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el depósito es de $0.5\,kg/L$. Se pide:

   (a) Halla una ecuación diferencial para $x(t) =$ kgs de sal presentes en el depósito al cabo de t minutos.

   (b) ¿Qué cantidad de sal habrá en el depósito a largo plazo?

   (c) Resuelve la ecuación diferencial y determina la cantidad de sal que hay en el depósito en cada instante t.

Nota: 2 puntos

a) Entra a $6L/min$ $\swarrow$ $c = 0{,}5\ kg/L$

Sale a $6L/min$ $\nwarrow$

concentración $= \frac{kg}{L}$

$x(0) = 5$

$x(t) =$ Kg de sal tras t minutos.

$$\begin{cases} x'(t) = 6 \cdot 0{,}5 - 6 \cdot \frac{x(t)}{50} \longrightarrow \text{Resolver EDO (maxima)} \rightarrow x(t) = C \cdot e^{-3t/25} + 25 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

$\begin{cases} t = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ $\rightarrow$ Problema de valor inicial (maxima) $\Big\}$ $\underline{x(t) = 25 - 20 \cdot e^{-\frac{3t}{25}}}$

b) Para ver la cantidad a largo plazo $\rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} (x(t)) = \underline{25.}$

A largo plazo habrá 25 Kg de sal en el depósito.

c) Resuelto en maxima $\rightarrow$ $\underline{x(t) = 25 - 20 \cdot e^{-\frac{3t}{25}}}$