Matemáticas. 1º Bioquímica. Convocatoria enero, 13/1/2025

Nombre: SOLUCIONES

1. Se estudia el efecto de dos enzimas, A y B, en la velocidad de una reacción bioquímica (en mMol/min). En 15 experimentos de laboratorio se recogen los siguientes datos

A	189	160	155	145	96	132	216	176	164	200	225	112	103	127	151
B	150	248	186	239	218	262	259	256	222	226	217	243	131	251	239

a) Representa los datos mediante un diagrama de tallos y hojas doble (a mano)

b) Representa los datos mediante un diagrama boxplot doble (con maxima o a mano), indicando mediana, cuartiles y presencia de atípicos en cada caso

c) Extrae de los dibujos conclusiones sobre el efecto de cada enzima en la velocidad de reacción: simetría, dispersión, sesgos, etc... ¿Es razonable concluir que B acelera la reacción?

d) Calcula en cada caso $\bar{x}$ y σ_n. Entre media y mediana, ¿qué medición te parece más razonable?

e) Suponer que B se distribuye como una normal $N(\mu, \sigma)$, con μ y σ desconocidos. Encuentra un intervalo de confianza para μ al 95%. ¿Hay evidencia suficiente para garantizar que μ es superior a 200?

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad del box-plot dibujado con Maxima (escala correcta, datos atípicos, etc...)

$\boxed{a}$

A		B
96	75	
103 12	100	
27 32 45	125	31
51 64 55 60	150	50
76 89	175	86
00 16	200	18 22 17
25	225	48 39 26 43 39
	250	62 59 56 51
	275	
	300	

$\boxed{c}$

A Datos simétricos entorno a 150, sin sesgos, pero con dispersión alta

B Datos centrados entorno a 225, con sesgo claro a la izda, y posiblemente atípicos. Si exceptuamos estos, la dispersión es más baja.

Claramente, los resultados de B son mayores que A (salvo posibles atípicos)

$\boxed{b}$

A

$x_8 \to$ $M = 155$

$\frac{x_4+x_5}{2} \to$ $Q_1 = \frac{127+132}{2} = 129'5$

$\frac{x_{11}+x_{12}}{2} \to$ $Q_3 = \frac{176+189}{2} = 182'5$

$RI = 53$

$\frac{3}{2} RI = 79'5$

$IT = [50, 262]$

B

$M = 239$

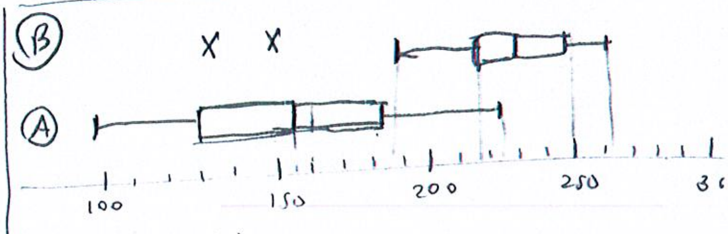
$Q_1 = \frac{217+218}{2} = 217'5$

$Q_3 = \frac{248+251}{2} = 249'5$

$RI = 32$

$\frac{3}{2} RI = 48$

$IT = [169'5, 297'5]$ $\longrightarrow$ 2 datos atípicos $\{131, 150\}$



Box-plots

b) con Maxima

A	B
$M = 155$	$M = 239$
$Q_1 = 129'5$	$Q_1 = 217'5$
$Q_3 = 182'5$	$Q_3 = 249'5$

→ sale lo mismo en este caso

d)

A	B
$\bar{x} = 156'73$	$\bar{x} = 223'13$
$\sigma_n = 38'09$	$\sigma_n = 37'82$

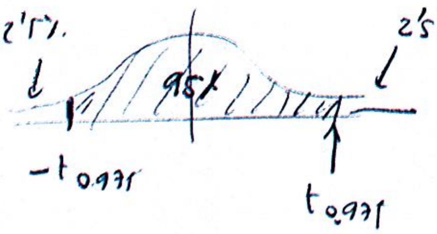
→ En A, $M \simeq \bar{x}$, puedes usarse ambas, pues no hay sesgos ni atípicos

En B → $\bar{x} \ll M$, debido a los atípicos izda. mejor usar la M.

e) Si $B \sim N(\mu, \sigma)$ con μ, σ desconocidos

⇒ $\boxed{\text{IC para } \mu \text{ al } 95\%}$

Usamos la fórmula vista en clase



$$IC \quad \bar{x} \pm \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.975}^{(14)}$$

Aquí $\bar{x} = 223'13$

$\sigma_{n-1} = 39'15$ ⟶ $IC = [201'45, 244'81]$

$t_{0.975}^{(14)} = 2'145$

Con confianza 95% la media μ de B es > 200

2. Para determinar el transporte de citrato en presencia de una enzima, se utiliza como modelo la ecuación de Michaelis-Menten

$$V = \frac{a\,S}{b+S},$$

donde S es la concentración de citrato, V la velocidad del transporte, y $a, b > 0$ son dos parámetros asociados a la enzima. En el laboratorio se han obtenido los siguientes datos

S (mM)	0.1	0.5	1.5	5	10	15	30	50
V (nmol/min)	74	173	390	670	845	878	910	950

(i) Calcula la recta de regresión de $(1/S, 1/V)$, dibújala y describe la calidad del ajuste.

(ii) Usando que $\dfrac{1}{V} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{b}{aS}$, estima el valor de los parámetros a y b.

(iii) Representa en una gráfica los datos originales (S, V) y la curva de Michaelis-Menten con los valores a, b del apartado (ii). Describe si te parece un buen ajuste.

(iv) Utiliza el método de mínimos cuadrados para dar otra estimación de a y b. Dibuja ambas curvas en un mismo gráfico y decide qué ajuste te parece mejor.

(v) ¿Qué valor de S pronosticarías si la velocidad es $V = 850$?

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad de las gráficas dibujadas con Maxima (escala correcta, etiquetas en los ejes, etc...)

a) $u = \frac{1}{S}$, $v = \frac{1}{V}$ $\rightarrow$ $v = 0'00144 + 0'00124 \cdot u$, $r = 0'9837$

En Maxima se ve un ajuste no muy bueno, debido al último pto alejado, que influye mucho en la pendiente

b) $a = \dfrac{1}{0'00144} = 693'65$ ← claramente subestima el valor de V_{max}

$b = a \cdot 0'00124 = 0'8635$

c) En la gráfica el ajuste se ve que no es bueno

d) Por mínimos cuadrados $\rightarrow$ $\boxed{a = 998'89,\ b = 2'281}$ $\rightarrow$ este ajuste sí se ve bueno en Maxima.

e) $850 = \dfrac{a \cdot S}{b+S} \Rightarrow \boxed{S = 13'02}$

3. Durante una epidemia de covid en dos poblaciones aisladas, las velocidades (instantáneas) de propagación de la enfermedad vienen dadas por las funciones

$$V_1(t) = 1000\,t\,\exp(-0'4t^2), \quad V_2(t) = 800\,t^2\,\exp(-t^3/6), \quad t > 0,$$

donde las unidades de t son meses, y las de V son nº casos/mes.

a) Dibuja las gráficas de $V_1(t)$ y $V_2(t)$, describe brevemente los aspectos que visualmente te parezcan más relevantes.

b) Calcula cuándo se igualan V_1 y V_2, y cuál de las funciones es mayor a largo plazo.

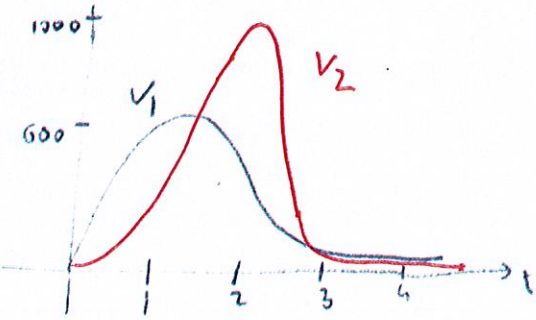
c) Para la función V_2, calcula el valor del pico máximo y cuándo se alcanza éste.

d) Dibuja la gráfica de la derivada $(V_1)'$, y determina a partir de ella si V_1 tiene puntos de inflexión.

e) Calcula el área de la región entre las dos curvas en que V_2 está por encima de V_1.

Nota: 2'5 puntos

Observación: se valorará la calidad de las gráficas dibujadas con Maxima (escala correcta, etiquetas en los ejes, leyenda, etc...)



a) Se dibujan con Maxima

b) $V_1(t) = V_2(t)$ en 2 ocasiones

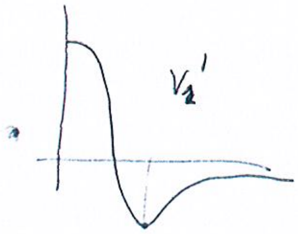
$t_1 = 0'992$

$t_2 = 2'986$

A largo plazo V_1 mayor que V_2 (pues $\lim_{t \to \infty} \frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \infty$)

c) Máx $V_2(t)$ en $t = 1'587$ y valor $V_2 = 1034'984$

d)



El mínimo de V_1' es un pto inflex de V_1

Se alcanza en $t = 1'9365$

e) Área $= \displaystyle\int_{0'992}^{2'986} (V_2(t) - V_1(t))\,dt = 532'892$ casos//

4. (a) Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ centrado en $a = 8$ (puedes usar Maxima), y dibuja la gráfica conjunta de $f(x)$ y $P_3(x)$ para $x \in [0, 25]$.

(b) Utiliza el polinomio anterior para encontrar una aproximación **racional** de $\sqrt[3]{9}$, y determina cuántos decimales exactos tiene.

Nota: 1 punto

Observación: En b), la aproximación de $\sqrt[3]{9}$ que se pide debe ser una **fracción**

a) Con Maxima

$$P_3(x) = 2 + \frac{x-8}{12} - \frac{(x-8)^2}{288} + \frac{5(x-8)^3}{20736}$$

Gráfica en Maxima

b) Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Maxima

$$\Rightarrow \sqrt[3]{9} \simeq P_3(9) = 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20736} = \frac{43133}{20736} = 2'\underline{080}102237\ldots$$

Comparando con el valor real $f(9) = 2'\underline{080}083823\ldots$

$\longrightarrow$ al menos 3 primeros decimales exactos.

El error es $|f(9) - P_3(9)| = 1'84 \cdot 10^{-5} \leq 2 \cdot 10^{-5}$

(el 5º decimal sube o baja 2 unidades)

5. En cierta reacción química, la cantidad de sustrato $S(t)$ (en moles) evoluciona con el tiempo (en seg) según la ecuación diferencial

$$S'(t) = -a\,\big(S(t) - 10\big),$$

para una constante $a > 0$. Suponer que inicialmente $S(0) = 40$, y al cabo de 20 segundos la cantidad de sustrato se ha reducido a la mitad.

a) Sin resolver la ED, esboza la gráfica de $S(t)$ y determina el valor a largo plazo

b) Resuelve la ecuación diferencial y calcula el valor de la constante a.

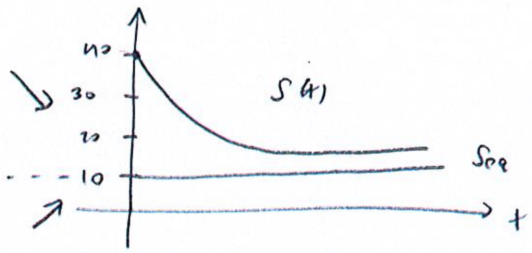
c) ¿Cuánto vale S al cabo de 40 seg? ¿Cuánto tiempo llevará bajar a $S = 12$ moles?

Nota: 1'5 puntos

a) Busco S_{eq} $\rightarrow$ $0 = -a(S_{eq} - 10) \Rightarrow S_{eq} = 10$

Mirando los signos

	$(0, 10)$	$(10, 40)$
$\text{Sign}(S'(t))$	$\oplus$ ↗	$\ominus$ ↘



A largo plazo

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = S_{eq} = 10$$

b) $S(t) = S_{eq} + C e^{-at} = 10 + C\cdot e^{-at}$

$t=0 \rightarrow S(0)=40 \longrightarrow 40 = 10 + C\cancel{e^{-a0}} \Rightarrow \boxed{30 = C}$

$t=20 \rightarrow S(20)=20 \longrightarrow 20 = 10 + 30\, e^{-20a}$

$1\cancel{0} = 3\cancel{0}\, e^{-20a} \Rightarrow e^{20a} = 3$

$\Rightarrow 20a = \ln 3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{\ln 3}{20} = 0'05493}$

$\Rightarrow \boxed{S(t) = 10 + 30\cdot e^{-0'0549\cdot t}} \Rightarrow \left(\text{ó } S(t) = 10 + 30\cdot 3^{-\frac{t}{20}}\right)$

c) $S(40) = \boxed{13'33 \text{ moles}}$ ← Máxim

Busco t / $S(t) = 12$ $\rightarrow$ $\boxed{t = 59'3 \text{ seg.}}$