

Nombre:

SOLUCIONES

10

1.- En una zona agrícola se construye un embalse de riego que inicialmente almacena 500 m^3 de agua. Debido a la evaporación y a las filtraciones cada semana se pierde aproximadamente un 3 % del volumen del embalse.

(a) ¿cuánto tiempo tiene que pasar para que se vacíe en un 75 %?

(b) Suponer que mediante un trasvase se aporta al embalse unos 5 m^3 semanales, ¿qué porcentaje de agua quedará en el embalse después de 52 semanas? ¿Se llegará a vaciar en un 75 % en algún momento?

(c) ¿Cuánto debería aportar el trasvase semanalmente para que el embalse contuviese 250 m^3 a largo plazo?

1

a) $x(n)$ = volumen de agua (en m^3) tras n semanas

$$x(0) = 500$$

$$x(1) = x(0) - \frac{3}{100} x(0) = x(0) \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 0.97 x(0)$$

$$x(2) = x(1) - \frac{3}{100} x(1) = 0.97 x(1) = 0.97(0.97 x(0)) = 0.97^2 x(0)$$

$$x(3) = x(2) - \frac{3}{100} x(2) = 0.97 x(2) = 0.97(0.97^2 x(0)) = 0.97^3 x(0)$$

$$\boxed{x(n) = 0.97^n \cdot x(0) = 0.97^n \cdot 500}$$

✓

Se se vacía un 75 % queda lleno el 25 %, es decir, 125 m^3 de agua.

$$\text{Busco } n / x(n) = 125$$

$$0.97^n \cdot 500 = 125$$

$$0.97^n = 0.25 \rightarrow n \ln 0.97 = \ln 0.25 \rightarrow n = \frac{\ln 0.25}{\ln 0.97} = \boxed{45.51 \text{ semanas}}$$

✓

Para que se vacíe un 75 % tiene que pasar 45.51 semanas.

$$b) x(0) = 500 \text{ cada semana} + 5 \text{ m}^3 = K$$

$$x(1) = x(0) - \frac{3}{100} x(0) + K = 0.97 x(0) + K$$

$$x(2) = x(1) - \frac{3}{100} x(1) + K = 0.97 x(1) + K = 0.97(0.97 x(0) + K) + K = 0.97^2 x(0) + 0.97K + K$$

$$x(3) = x(2) - \frac{3}{100} x(2) + K = 0.97 x(2) + K = 0.97(0.97^2 x(0) + 0.97K + K) + K = 0.97^3 x(0) + 0.97^2 K + 0.97K + K = 0.97^3 x(0) + K(0.97^2 + 0.97 + 1)$$

$$\rightarrow x(n) = 0.97^n x(0) + K(0.97^{n-1} + \dots + 0.97 + 1) = 0.97^n x(0) + K \frac{0.97^n - 1}{0.97 - 1}$$

$$x(n) = 0.97^n \cdot 500 - 166.67(0.97^n - 1)$$

Buso $x(n)/n=52$

$$x(52) = 0.97^{52} \cdot 500 - 166.67(0.97^{52} - 1) = 235 \text{ m}^3$$

Tras 52 semanas quedarán 235 m^3 de agua y como 500 m^3 es el 100% de la capacidad, 235 m^3 es el 47%.

$$\begin{array}{l} 500 \rightarrow 100\% \\ 235 \rightarrow x \end{array} \quad x = \frac{235 \cdot 100}{500} = 47\%$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0.97^\infty \cdot 500 - 166.67(0.97^\infty - 1) = 166.67 \text{ m}^3$$

Si se vacía en un 75% queda el 25%, es decir, 125 m^3 y como se ve en el límite calculado arriba, a largo plazo quedarán 166.67 m^3 de agua, por lo que no se vaciará en un 75%.

c) Buso $K/x(n) = 250$ cuando $n = \infty$

$$x(n) = 0.97^n x(0) + K \frac{0.97^n - 1}{0.97 - 1}$$

$$x(\infty) = 0.97^\infty x(0) + K \frac{0.97^\infty - 1}{0.97 - 1} = K(33.33)$$

$$250 = 33.33K \rightarrow K = \frac{250}{33.33} = 7.5 \text{ m}^3$$

Para que el embalse contenga 250 m^3 de agua a largo plazo el trasvase deberá aportar semanalmente 7.5 m^3 de agua.