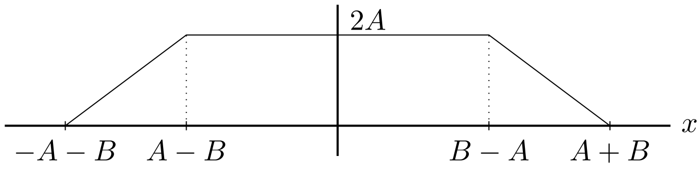
HOJA 1: convoluciones

1. Calcula la convolución de $\chi_{[-A,A]} * \chi_{[-B,B]}$, y demuestra que coincide con la función trapezoidal del dibujo (suponer, por ejemplo, $B \geq A$)



2. Encuentra ejemplos de $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $f * g(x) = \infty$ en algún punto $x \in \mathbb{R}$.

   Sugerencia: Prueba con $f(x) = g(x) = 1/|x|^\alpha$, $0 < |x| \leq 1$, para una potencia α apropiada.

3. Demuestra la propiedad asociativa de la convolución

$$f * (g * h)(x) = (f * g) * h(x),$$

   suponiendo que las integrales involucradas convergen en valor absoluto (al menos para una expresión).

4. Demuestra que el soporte de una convolución cumple $\operatorname{sop}(f * g) \subset \overline{\operatorname{sop} f + \operatorname{sop} g}$.

   Nota: podéis considerar $\operatorname{sop} h := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \; : \; h(x) \neq 0\}}$, que es la definición habitual cuando h es continua. Cuando h es sólo medible, $\operatorname{sop} h$ es el complementario del mayor abierto U donde $h(x) = 0$ ctp $x \in U$.

5. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, con $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, demuestra que

$$\lim_{|x| \to \infty} f * g(x) = 0.$$

6. Hallar la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) + bx(t) = f(t), \quad \text{con} \quad x(0) = 0,$$

   y escribirla como $x(t) = f * k(t)$ para cierta función $k(s)$ a determinar.

7. Sea $\{\varphi_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad, y $f(x)$ una función acotada en $\mathbb{R}^d$.

   (a) Si f es continua en el punto a, entonces $\lim_{t \to 0} \varphi_t * f(a) = f(a)$.

   (b) Si U abierto y $f \in C(U)$, entonces $\varphi_t * f(x) \to f(x)$ uniformemente sobre compactos de U.

   (c) Si $f \in C(\mathbb{R}^d)$ y $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, entonces $\varphi_t * f(x) \to f(x)$ uniformemente en $x \in \mathbb{R}^d$.

8. **Desigualdad de Hölder generalizada:** Demostrar por inducción, a partir de la desigualdad de Hölder, que si $1 \leq p_1, p_2, \ldots, p_n \leq \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_j \in L^{p_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces se cumple

$$\int |f_1 \, f_2 \, \ldots f_n| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_n\|_{p_n} .$$

9. **Desigualdad de Young generalizada:** Sean $1 \leq p, r, s \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + 1$. Demostrar que si $f \in L^p$ y $g \in L^r$ se cumple que $f * g \in L^s$ y

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_r .$$

   Sugerencia: escribir $f * g(x) = \int |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{q}{r}} \, h(x,y) \, dy$, para una función h apropiada, y usar (justificadamente) la desigualdad de Hölder para 3 funciones del ejercicio anterior.

10. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $R > 0$, denotamos la función dilatada por $f_R(x) = f(x/R)$.

(i) Probar que $\|f_R\|_p = R^{n/p}\|f\|_p$.

(ii) Hallar una expresión para $f_R * g_R$ en términos de la dilatada de $(f * g)$.

(iii) Demostrar que la desigualdad de Young $\|f * g\|_s \leq \|f\|_p\|g\|_r$ sólo puede ser cierta para toda $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ cuando los índices satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + 1$.

Sugerencia: En (iii), usar (i)+(ii), y hacer tender R a 0 ó ∞.