

HOJA 2: transformada de Fourier

1. Cálculo de transformadas de Fourier:

- (a) $f(x) = \text{sign}(x) e^{-\alpha|x|}$ (b) $f(x) = x^{\alpha-1} e^{-x} \chi_{[0,\infty)}$ (c) $f(x) = \sin x e^{-x} \chi_{[0,\infty)}$
 (d) $f(x) = \chi_{[1/2,1)}(|x|)$ (e) $f = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ (f) $f(x) = e^{-|x|} \cos x$
 (g) $f(x) = x e^{-\pi x^2}$ (h) $f = e^{-\pi(x^2+2x)}$

2. Propiedades de la TF: Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demostrar

- (i) *Traslación:* $g(x) = f(x - a) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = e^{-2\pi i a \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$
 (ii) *Dilatación:* $g(x) = f(x/R) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = R^d \hat{f}(R\xi)$
 (iii) *Modulación:* $g(x) = e^{i\eta x} f(x) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \frac{\eta}{2\pi})$
 (iv) *Dilatación matricial:* $g(x) = f(Ax) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = \det(A)^{-1} \hat{f}((A^{-1})^t \xi)$
 (v) *Laplaciano:* $g(x) = \Delta f(x) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi).$

3. TF y rotaciones: (a) Demuestra que el laplaciano en \mathbb{R}^d es invariante por rotaciones:

$$\Delta(f \circ R) = (\Delta f) \circ R, \quad \forall R \in SO_d(\mathbb{R}).$$

(b) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es una función radial, entonces \hat{f} es también una función radial.

Sugerencia: En (a), usar (iv)-(v) del ejercicio anterior; en (b) usar que f es radial si y sólo si $f \circ R = f$, para toda rotación R de \mathbb{R}^d .

4. Lema de Riemann-Lebesgue: demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Sugerencia: Demuéstralo primero para f en C_c^∞ , y extiende por densidad.

5. Utiliza la TF para encontrar una solución de la EDO

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: Quizá necesites hacer antes el ejercicio 1.c.

6. (i) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto, probar que $\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x z} dx$, $z \in \mathbb{C}$, define una función holomorfa en todo \mathbb{C} .

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, y si $\text{sop } f$ y $\text{sop } \hat{f}$ son ambos compactos, entonces $f \equiv 0$.

(iii) Demuestra una versión de (ii) para funciones f en \mathbb{R}^n .

Sugerencia: en (iii), fija $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, y aplica (ii) a la función $g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x') e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} dx'$.

7. (i) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $|\text{sop } f| < \infty$, demuestra que, para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ medible se tiene

$$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq |\text{sop } f| |E| \|f\|_2^2.$$

(ii) Deduce que si $E \subset \text{sop } \hat{f}$ es tal que $\int_E |\hat{f}|^2 \geq (1 - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2$, entonces

$$|\text{sop } f| |E| \geq 1 - \varepsilon,$$

e interprétalo como un principio de incertidumbre.

Nota: un teorema más fuerte, debido a Benedicks, afirma que para toda $f \neq 0$ se tiene $|\text{sop } f| |\text{sop } \hat{f}| = \infty$.

8. Suponer que $f \in C^1(\mathbb{R})$ es tal que $|f(x)|, |f'(x)| \leq c/(1+|x|)$. Probar que se cumple la **igualdad de Heisenberg**

$$\|xf(x)\|_2 \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2 = \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2.$$

si y sólo si $f(x) = ae^{-bx^2}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

Sugerencia: Revisar la prueba vista en clase, e investigar cuándo se tiene la igualdad de Cauchy-Schwarz.

9. Se define, para $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $t > 0$

$$S_t f(x) = \int_{-t}^t \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

(a) Justificar que la integral anterior está bien definida y converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar una función $D_t(x)$ tal que $S_t f = f * D_t$.

(c) Probar $\{D_t\}_{t>0}$ no es una aproximación de la identidad regular.

10. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, y que también se tiene $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$.

Sugerencia: en el segundo caso utiliza el teorema de Plancherel.

11. Sea $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ y $\mathcal{X}_1 = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

a) Demuestra que $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X}_1$

b) Demuestra que si $f \in \mathcal{X}_1$ entonces

$$(*) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad \text{c.p.t. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Deduce que las funciones de \mathcal{X}_1 son continuas (tras modificarlas en un conjunto de medida nula).

Sugerencia: en b) utiliza aproximaciones de la identidad para construir una sucesión $f_n \in \mathcal{X}$ tal que $\hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}f$ en las normas de L^1 y L^2 . Deduce (*) a partir de su validez para f_n (por el teorema de inversión) y un adecuado paso al límite.

12. Revisa la demostración del teorema de muestreo de Shannon para probar que si $\lambda > 1$ y $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es una función tal que

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in [-B/2, B/2], \quad \text{y } \text{sop } \mathcal{F}\varphi \subset [-\lambda B/2, \lambda B/2],$$

entonces para $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\text{sop } \hat{f} \subset [-B/2, B/2]$ se tiene

$$f(t) = L^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda B} f\left(\frac{n}{\lambda B}\right) \varphi\left(t - \frac{n}{\lambda B}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Calcula la SF de $\hat{f}(\xi)$ en $L^2(-\lambda B/2, \lambda B/2)$, y utiliza que $\hat{f} = \hat{f}\hat{\varphi} = SF \cdot \hat{\varphi}$.

13. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, considera la EDP: $(P_\lambda) \quad \Delta u - \lambda^2 u = f$.

a) Demuestra que, si $\alpha > 0$, la función $G_\alpha(x)$ (denominada *potencial de Bessel*), dada por

$$G_\alpha(x) = \frac{\pi^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi|x|^2}{t}}}{t^{d/2}} e^{-\pi t} t^{\alpha-1} dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

es positiva, está en $L^1(\mathbb{R}^d)$, y su transformada de Fourier es $\hat{G}_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha}$.

b) Demuestra que si $\lambda \neq 0$ entonces la solución de (P_λ) , se puede escribir como

$$u(x) = a_\lambda \int_{\mathbb{R}^d} G_1(b_\lambda(x-y)) f(y) dy,$$

para ciertas constantes a_λ, b_λ que debes determinar.