HOJA 3: Aplicaciones de la TF a EDPs y teoría de distribuciones

1. *La ecuación del calor.* Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sea $u(t,x) = W_t * f(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

   a) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, demuestra que

   $$\lim_{|(t,x)|\to\infty} u(t,x) = 0.$$

   b) Demuestra que se tiene la siguiente propiedad de semigrupo

   $$u(t+s,x) = \big[W_t * u(s,\cdot)\big](x), \quad t,s>0.$$

   Dicho de otro modo, si $T_t(f) := W_t * f$, entonces $T_{t+s} = T_t T_s$, $t,s>0$.

   c) Si f es *real*, demuestra los siguientes principios de máximo y del mínimo

   $$\sup_{\substack{t\in(t_0,t_1)\\ x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}^d} u(t_0,x) \quad \text{y} \quad \inf_{\substack{t\in(t_0,t_1)\\ x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) \;=\; \inf_{x\in\mathbb{R}^d} u(t_0,x), \quad t_1 > t_0 > 0.$$

   Sugerencia: En b) suponer primero $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y usar TF, y después extender a todo L^1 por densidad.

2. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, probar formalmente que

   $$\Delta u = f \quad \text{implica} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2$$

   En particular, justifica la validez suponiendo que $u \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n)$. Usando distribuciones puedes tratar de justificar también la validez suponiendo sólo que $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

   Sugerencia: Utiliza Plancherel, y para justificar las hipótesis, aproximaciones de la identidad.

3. *Ecuación de ondas en dimensión $d=1$:* a partir de la identidad vista en clase

   $$\hat{u}(t,\xi) \;=\; \hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) \;+\; \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}, \quad t,\xi \in \mathbb{R},$$

   utiliza la transformada inversa de Fourier para obtener la *fórmula de D'Alembert*

   $$u(t,x) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} \;+\; \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds.$$

4. *Ecuación de ondas en dimensión $d=3$.* A partir de las fórmulas vistas en clase, demuestra la siguiente *identidad de Kirchhoff* para la solución $u(t,x)$ de la ecuación de ondas en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$

   $$u(t,x) = \fint_{S_t^2(x)} \Big[f(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x) + t g(y)\Big]\, d\sigma(y).$$

5. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $1 \le p \le \infty$, demuestra:

   a) $L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

   b) si $f_m \to f$ en norma $L^p(\Omega)$, entonces $f_m \to f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

   c) si $f_m \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es una sucesión tal que existe $f(x) := \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ en ctp $x \in \Omega$ y se cumple $|f_m(x)| \le h(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces $f_m \to f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

   d) Encuentra una sucesión tal que $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = 0$ en ctp x, pero $f_m \not\to 0$ en $\mathcal{D}'$.

   Sugerencia: en (d) considera una aproximación de la identidad, por ejemplo $f_m(x) = m\chi_{[0,1/m]}$ en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

6. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, y considera la aproximación de la identidad $f_t(x) = t^{-n} f(x/t)$, $t > 0$. Demuestra que
$$\lim_{t\to 0^+} f_t = \delta \quad \text{en el sentido de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

7. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $u(t,x) := f(t \pm x)$ demuestra

   a) $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

   b) $(\partial_{tt} - \partial_{xx})u = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   Sugerencia: En b), una posible estrategia es cambiar variables $x - t = y$, $x + t = z$ en las integrales involucradas.

8. En este ejercicio se demuestra que $u(x) = c_n/|x|^{n-2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ cumple $\Delta u = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si $n \geq 3$.

   a) Considera $u_\varepsilon(x) = c_n/(|x|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}$, y demuestra que $u_\varepsilon \to u$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, cuando $\varepsilon \to 0^+$.

   b) Demuestra que $\Delta(u_\varepsilon)(x) = \varepsilon^{-n} h(x/\varepsilon)$ donde $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} h = 1$ (si c_n es adecuada).

   c) Deduce de lo anterior y del ejercicio 6 que $\Delta u = \delta$.

   d) Utiliza $u(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x|$ y $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \log(|x|^2 + \varepsilon^2)$, y argumentos similares, para probar que $\Delta u = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

9. Sea $G(t,x) = W_t(x)\, \chi_{(0,\infty)}(t)$, donde $W_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es el núcleo del calor en $\mathbb{R}^n$.

   a) Demuestra que $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ y que $G^\varepsilon = G\chi_{[\varepsilon,\infty)}(t)$ converge a G en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

   b) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, demuestra que
$$\big(G^\varepsilon, (\partial_t + \Delta_x)\varphi\big) = -[W_\varepsilon * \varphi(\varepsilon, \cdot)](0).$$

   c) Deduce de lo anterior que $(\partial_t - \Delta_x)G = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

10. a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, demuestra que, para $h \to 0$,
$$\frac{\varphi(x + h\mathbf{e}_j) - \varphi(x)}{h} \longrightarrow \partial_{x_j}\varphi(x) \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

   b) Se dice que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es L^p-diferenciable si para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con la propiedad
$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(\cdot + h\mathbf{e}_i) - f(\cdot)}{h} - g_i \right\|_{L^p} = 0.$$
   Demuestra que en ese caso g_i coincide con la derivada distribucional $\partial_{x_i} f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

11. Demuestra que la derivada distribucional de $\text{VP}\frac{1}{x}$ cumple
$$\Big([\text{VP}\frac{1}{x}]', \varphi\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx\Big], \quad \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

12. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$, y sea $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Sea $\chi \in C_c^\infty(B_2(0))$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$ y $\chi|_{B_1(0)} \equiv 1$, y sea $\chi_m(x) = \chi(x/m)$, $m \geq 1$. Demuestra las siguientes propiedades para cada $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

   a) $T * \psi_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $\varepsilon \to 0^+$

   b) $\chi_m T \to T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $m \to \infty$

   c) Deduce que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

13. Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

a) Demuestra que para todo compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $C = C(K,T) > 0$ y $n_0 = n_0(K,T) \in \mathbb{N}$ tales que

$$(\dagger) \qquad \big|(T,\varphi)\big| \leq C \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq n_0} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_\infty, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(K).$$

b) Si $\operatorname{sop} T$ es compacto en Ω, demuestra que existe un compacto fijo K_0 en Ω, y constantes n_0 y C_0 tales que

$$(\ddagger) \qquad \big|(T,\varphi)\big| \leq C_0 \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq n_0} \max_{x\in K_0} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(x)|, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Sugerencia: En a) razona por reducción al absurdo: si no se cumple (†), existen $\varphi_m \in C_c^\infty(K)$ tales que

$$\big|(T,\varphi_m)\big| > m \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_\infty.$$

Deduce entonces que $\psi_m = \varphi_m/|(T,\varphi_m)| \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, que contradice $|(T,\psi_m)| = 1$. En b) utiliza que $T = \chi T$ cuando $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\chi|_{\operatorname{sop} T} \equiv 1$, y aplica a).

14. *Orden de una distribución.* Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si existe un entero $n_* \in \mathbb{N}$ tal que las constantes del ejercicio 13 cumplen $n_0(K,T) \leq n^*$ para todo $K \Subset \Omega$, se dice que T es una distribución de orden finito $\leq n_*$.

a) Demuestra que las medidas finitas sobre compactos $\mu \in \mathcal{M}_{\text{reg}}(\Omega)$ son distribuciones de orden 0.

b) Deduce que las distribuciones $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\delta$ no provienen de una medida (salvo si $\boldsymbol{\alpha} = 0$).

c) Demuestra que $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$ es una distribución de orden 1, pero no de orden 0.

d) Demuestra que $(T,\varphi) = \sum_{m=0}^\infty \varphi^{(m)}(m)$ es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de orden infinito.

15. Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\nabla T = 0$. Demuestra que $T \equiv$ cte.

Sugerencia: dada una aproximación de la identidad ψ_t, considera $T * \psi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

16. Calcula en el sentido de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(a) $x\delta''$	(b) $x^2\delta'$	(c) $e^{\alpha x}\delta''$	(d) $\big(\operatorname{sen} x\, \chi_{(-\infty,0)}\big)'$
(e) $x\,(\mathrm{VP}\frac{1}{x})$	(f) $(x_+^\alpha)'$, si $\alpha \geq 0$	(g) $(x_+^\alpha)'$, si $\alpha \in (-1,0)$	(h) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha\, x_+^{\alpha-1}$

Nota: aquí x_+^α se define como $(x_+^\alpha,\varphi) = \int_0^\infty x^\alpha\varphi(x)\,dx$, si $\alpha > -1$.

17. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ son tales que $\varphi T = 0$, prueba que $(T,\varphi) = 0$. ¿Es cierto el recíproco?