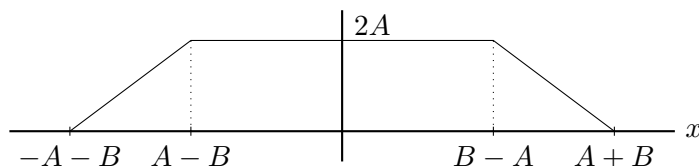


HOJA 1: convoluciones

1. Calcula la convolución de  $\chi_{[-A,A]} * \chi_{[-B,B]}$ , y demuestra que coincide con la función trapezoidal del dibujo (suponer, por ejemplo,  $B \geq A$ )



2. Encuentra ejemplos de  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  tales que  $f * g(x) = \infty$  en algún punto  $x \in \mathbb{R}$ .

Sugerencia: Prueba con  $f(x) = g(x) = 1/|x|^\alpha$ ,  $0 < |x| \leq 1$ , y 0 en el resto, para una potencia  $\alpha$  apropiada.

3. Demuestra la propiedad asociativa de la convolución

$$f * (g * h)(x) = (f * g) * h(x),$$

suponiendo que las integrales involucradas convergen en valor absoluto (al menos para una expresión).

4. Demuestra que el soporte de una convolución cumple  $\text{sop}(f * g) \subset \overline{\text{sop} f + \text{sop} g}$ .

Nota: si  $f$  es medible,  $\text{sop} f$  se define como el complementario del mayor abierto  $U$  donde  $f(x) = 0$  ctp  $x \in U$ . Cuando  $f$  es continua esta definición coincide con la usual  $\text{sop} f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ .

5. Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  y  $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ , con  $1 < p < \infty$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , demuestra que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0.$$

6. Halla la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) + bx(t) = f(t), \quad \text{con } x(0) = 0,$$

y escríbela como convolución,  $x(t) = f * k(t)$  para cierta función  $k(s)$  a determinar.

7. Sea  $\{\varphi_t\}_{t>0}$  una aproximación de la identidad, y  $f(x)$  una función acotada en  $\mathbb{R}^d$ .

(a) Si  $f$  es continua en el punto  $a$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t * f(a) = f(a)$ .

(b) Si  $U$  abierto y  $f \in C(U)$ , entonces  $\varphi_t * f(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente sobre compactos de  $U$ .

(c) Si  $f \in C(\mathbb{R}^d)$  y  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , entonces  $\varphi_t * f(x) \rightarrow f(x)$  uniformemente en  $x \in \mathbb{R}^d$ .

8. **Desigualdad de Hölder generalizada:** Demostrar por inducción, a partir de la desigualdad de Hölder, que si  $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_n \leq \infty$  con  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$  y  $f_j \in L^{p_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , entonces se cumple

$$\int |f_1 f_2 \dots f_n| \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \dots \|f_n\|_{p_n}.$$

9. **Desigualdad de Young generalizada:** Sean  $1 \leq p, r, s \leq \infty$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + 1$ . Utiliza el ejercicio anterior para demostrar que si  $f \in L^p$  y  $g \in L^r$  entonces  $f * g \in L^s$  y se cumple que

$$\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_r.$$

Sugerencia: escribir  $f * g(x) = \int |f(x-y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(y)|^{1-\frac{r}{p}} h(x,y) dy$ , para una función  $h$  apropiada, y usar (justificadamente) la desigualdad de Hölder para 3 funciones del ejercicio anterior.

10. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  y  $R > 0$ , denotamos la función dilatada por  $f_R(x) = f(x/R)$ .

(i) Probar que  $\|f_R\|_p = R^{n/p} \|f\|_p$ .

(ii) Hallar una expresión para  $f_R * g_R$  en términos de la dilatada de  $(f * g)$ .

(iii) Demostrar que la desigualdad de Young  $\|f * g\|_s \leq \|f\|_p \|g\|_r$  sólo puede ser cierta para toda  $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$  cuando los índices satisfacen  $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + 1$ .

*Sugerencia:* En (iii), usar (i)+(ii), y hacer tender  $R$  a 0 ó  $\infty$ .