HOJA 3: Aplicaciones de la TF a EDPs y teoría de distribuciones

1. *Propiedades de la ecuación del calor.* Sea $u(t,x) = W_t * f(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

   a) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, demuestra que

   $$\lim_{|(t,x)|\to\infty} u(t,x) = 0.$$

   b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, demuestra la propiedad de semigrupo

   $$u(t+s,x) = \big[W_t * u(s,\cdot)\big](x), \quad t,s > 0.$$

   c) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es *real*, demuestra los siguientes principios de máximo y del mínimo

   $$\sup_{\substack{t\in(t_0,t_1)\\ x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}^d} u(t_0,x) \quad \text{y} \quad \inf_{\substack{t\in(t_0,t_1)\\ x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) \;=\; \inf_{x\in\mathbb{R}^d} u(t_0,x), \quad t_1 > t_0 > 0.$$

2. Si $u \in L^2 \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ cumple que $\Delta u \in L^2$, probar que

   $$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2.$$

   Usando distribuciones, trata de justificar el resultado sin la hipótesis $u \in C^2$.

3. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 3$.* A partir de las fórmulas vistas en clase, demuestra la siguiente *identidad de Kirchhoff* para la solución $u(t,x)$ de la ecuación de ondas en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$

   $$u(t,x) = \fint_{S_t^2(x)} \Big[f(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x) + tg(y)\Big]\, d\sigma(y).$$

4. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $1 \le p \le \infty$, demuestra:

   a) $L^p(\Omega) \subset L^1_{\rm loc}(\Omega)$

   b) si $f_m \to f$ en norma $L^p(\Omega)$, entonces $f_m \to f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

   c) sea $f_m \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ tal que existe $f(x) := \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ ctp $x \in \Omega$ y se cumple $|f_m(x)| \le h(x) \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$, entonces $f_m \to f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

   d) Encuentra una sucesión tal que $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0$ en ctp x, pero $f_m \not\to 0$ en $\mathcal{D}'$.

   Sugerencia: en (d) considera una aproximación de la identidad, por ejemplo $f_m(x) = m\chi_{[0,1/m]}$ en $L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$.

5. a) Sea $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$, y considera la aproximación de la identidad $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$, $t > 0$. Demuestra que

   $$\lim_{t\to 0^+} \psi_t = \delta \quad \text{en el sentido de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

   b) Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\nabla T = 0$. Demuestra que $T \equiv$ cte.

   Sugerencia: en b) escoge $\psi \in \mathcal{D}$, y utiliza que $T * \psi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

6. Si $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ y $u(t,x) := f(t \pm x)$ demuestra

   a) $u \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

   b) $(\partial_{tt} - \partial_{xx})u = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   Sugerencia: En b), una posible estrategia es cambiar variables $x - t = y$, $x + t = z$ en las integrales involucradas.

7. *Solución fundamental del Laplaciano.* Sea $u(x) = c_n/|x|^{n-2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, con $n \geq 3$.

   a) Considera $u_\varepsilon(x) = c_n/(|x|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}$, y demuestra que $u_\varepsilon \to u$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, cuando $\varepsilon \to 0^+$.

   b) Demuestra que $\Delta(u_\varepsilon)(x) = \varepsilon^{-n} h(x/\varepsilon)$ donde $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} h = 1$ (si c_n es adecuada).

   c) Deduce de lo anterior y del ejercicio 5 que $\Delta u = \delta$.

   d) Utiliza $u(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|$ y $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \log(|x|^2 + \varepsilon^2)$, y argumentos similares, para probar que $\Delta u = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

8. *Solución fundamental de la ecuación del calor.* Sea $G(t, x) = W_t(x)\, \chi_{(0,\infty)}(t)$, donde la función $W_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ es el núcleo del calor en $\mathbb{R}^n$.

   a) Demuestra que $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ y que $G^\varepsilon = G\chi_{[\varepsilon,\infty)}(t)$ converge a G en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

   b) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, demuestra que

$$\big(G^\varepsilon, (\partial_t + \Delta_x)\varphi\big) = -[W_\varepsilon * \varphi(\varepsilon, \cdot)](0).$$

   c) Deduce de lo anterior que $(\partial_t - \Delta_x)G = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

9. a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, demuestra que, para $h \to 0$,

$$\frac{\varphi(x + h\mathbf{e}_j) - \varphi(x)}{h} \longrightarrow \partial_{x_j}\varphi(x) \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

   b) Se dice que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es L^p-diferenciable si para cada $i = 1, \ldots, n$, existe $g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con la propiedad

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(\cdot + h\mathbf{e}_i) - f(\cdot)}{h} - g_i \right\|_{L^p} = 0.$$

   Demuestra que en ese caso g_i coincide con la derivada distribucional $\partial_{x_i} f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

10. Demuestra que la derivada distribucional de $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$ cumple

$$\Big([\mathrm{VP}\frac{1}{x}]', \varphi\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx\Big], \quad \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

11. Calcula en el sentido de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(a) $x\delta''$	(b) $x^2\delta'$	(c) $e^{\alpha x}\delta''$	(d) $\big(\operatorname{sen} x\, \chi_{(-\infty,0)}\big)'$
(e) $x\,(\mathrm{VP}\frac{1}{x})$	(f) $(x_+^\alpha)'$, si $\alpha \geq 0$	(g) $(x_+^\alpha)'$, si $\alpha \in (-1, 0)$	(h) $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha\, x_+^{\alpha-1}$

Nota: aquí x_+^α se define como $(x_+^\alpha, \varphi) = \int_0^\infty x^\alpha \varphi(x)\, dx$, si $\alpha > -1$.