HOJA 3a: Transformada de Fourier y EDPs

1. *Propiedades de la ecuación del calor.* Sea $u(t,x) = W_t * f(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

   a) Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, demuestra que
$$\lim_{|(t,x)|\to\infty} u(t,x) = 0.$$

   b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, demuestra la propiedad de semigrupo
$$u(t+s,x) = \big[W_t * u(s,\cdot)\big](x), \quad t,s > 0.$$

   c) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es *real*, demuestra los siguientes principios de máximo y del mínimo
$$\sup_{\substack{t\in[t_0,t_1]\\ x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}^d} u(t_0,x) \quad \text{y} \quad \inf_{\substack{t\in[t_0,t_1]\\ x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) \;=\; \inf_{x\in\mathbb{R}^d} u(t_0,x), \quad t_1 > t_0 > 0.$$

2. *La ecuación de Laplace en el semiespacio superior.*

   Como denotamos en clase, sea $P_y(x) = c_d\, y/(|x|^2+y^2)^{\frac{d+1}{2}}$ el núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$.

   a) Demuestra que si $f \in \mathcal{UC} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ entonces
$$u(x,y) = P_y * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad y > 0,$$
   es una función de clase C^∞, con $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$.

   b) Demuestra que
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = f(x_0), \quad \text{uniformemente en todo } x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

   c) Demuestra la siguiente propiedad de regularidad respecto al dato de frontera:
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, y>0} \big|u_{f_1}(x,y) - u_{f_2}(x,y)\big| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

   Nota: en a) puedes usar (sin demostrar) el ejercicio 8.

3. Si $u \in C^2 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ cumple que $\Delta u \in L^2$, demuestra que $\partial_{x_i}\partial_{x_j} u \in L^2$, $\forall\ i,j = 1,\dots,n$. Además, utiliza Plancherel para probar que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2.$$

   Nota: Usando distribuciones se puede justificar el mismo resultado sin la hipótesis $u \in C^2$.

4. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 1$:* a partir de la identidad vista en clase
$$\hat{u}(t,\xi) \;=\; \hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) \;+\; \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}, \quad t,\xi \in \mathbb{R},$$
   utiliza la transformada inversa de Fourier para obtener la *fórmula de D'Alembert*
$$u(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \;+\; \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds.$$

5. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 3$.*

a) A partir de las fórmulas vistas en clase, demuestra la siguiente *identidad de Kirchhoff* para la solución $u(t,x)$ de la ecuación de ondas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

$$\text{(K)} \qquad u(t,x) = \fint_{S^2_t(x)} \Big[f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x) + t g(y) \Big] \, d\sigma(y).$$

b) Demuestra que si h es continua en un entorno de x_0 entonces

$$\lim_{r \to 0} \fint_{S^2_t(x_0)} h(z) \, d\sigma(z) = h(x_0).$$

c) Deduce de lo anterior que si $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C(\mathbb{R}^2)$ entonces

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{y} \quad u_t(0,x) = g(x).$$

Nota: un célebre teorema de Stein (1976) afirma que (b) es cierto $\forall\, h \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p > 3/2$ (y en general falso si $p \leq 3/2$).

6. a) Suponer que $f \in C^1$ y $g \in C$ tienen ambas soporte compacto contenido en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Demuestra que la solución de la ecuación de ondas dada por (K) cumple

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |u(t,x)| \leq \frac{C}{t}, \quad \text{si } t \to \infty,$$

donde $C = C(f,g) > 0$.

b) Trata de demostrar el mismo resultado suponiendo sólo que $|f(y)|, |\nabla f(y)|, |g(y)|$ tienen buen decaimiento, digamos $\leq c/(1+|y|)^N$, con N suficientemente grande (a determinar).

Sugerencia: en a) usar que la medida de $S^2_t(x) \cap B_1(0)$ es ≤ 1.

Ejercicios opcionales

7. Demuestra el siguiente lema de clase. Si $W_t(x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-|x|^2/4t}$ es el núcleo del calor en $\mathbb{R}^d$, entonces para cada multi-índice $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ se tiene

$$\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}} \big[W_t(x) \big] = t^{-|\boldsymbol{\alpha}|/2} \, p_{\boldsymbol{\alpha}}(x/\sqrt{t}) \, W_t(x),$$

donde $p_{\boldsymbol{\alpha}}$ es un polinomio de grado $|\boldsymbol{\alpha}|$. Deduce que

$$\max_{t \in [1/R, R]} \max_{|x| \leq R} \left| \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\boldsymbol{\alpha}} \big[W_t(x-y) \big] \right| \leq C \, e^{-|y|^2/(16R)}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d,$$

para alguna constante $C = C(R, \alpha_0, \boldsymbol{\alpha}, d) > 0$.

8. a) Si $P_\gamma(x) = 1/(1+|x|^2)^\gamma$, demuestra por inducción que para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ se tiene

$$\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}} P_\gamma(x) = \sum_{j=0}^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{q_{\boldsymbol{\alpha},j}(x)}{(1+|x|^2)^{\gamma+j}},$$

donde $q_{\boldsymbol{\alpha},j}(x)$ son polinomios de grado $\leq j$.

b) Si $P(x,y) = y^{-d} P_\gamma(x/y)$, demuestra que para todo $L \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\partial_y^L \Big[P(x,y) \Big] = y^{-d-L} \sum_{\ell=0}^{L} c_\ell P_{\gamma+\ell}(x/y),$$

para ciertas constantes c_ℓ.

c) Deduce de lo anterior que

$$\max_{y \in [1/R, R]} \left| \partial_y^L \partial_x^{\boldsymbol{\alpha}} [P_\gamma(x,y)] \right| \leq C_{L,\boldsymbol{\alpha},R}/(1+|x|^2)^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

9. Para $d \geq 3$, sean $K(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ y $\vec{G}(x) = \nabla(\frac{1}{|x|^{d-2}}) = (2-d)\frac{x}{|x|^d}$. Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$

   a) Demuestra que $K * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

   b) Demuestra que $\vec{G} * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

   c) Demuestra que $K * f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que se tiene $\nabla[K * f(x)] = \vec{G} * f(x)$.

10. a) Demuestra que la función $h(r) = [\log(1/r)]^\gamma$, $0 < r < 1$, cumple

   $$(\dagger) \qquad h(r) \to \infty, \quad rh'(r) \to 0, \quad r^2 h''(r) \to 0, \quad \text{cuando } r \to 0^+$$

   si y sólo si $\gamma \in (0,1)$.

   b) Sea $u(x,y) = (x^2 - y^2)h(r)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $h \in C^\infty(0,\infty)$ verifica $(\dagger)$. Demuestra que

   $$u_{xx}, u_{yy} \notin C(\mathbb{R}^2), \quad \text{pero} \quad \Delta u \in C(\mathbb{R}^2).$$

11. a) Sea $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Demuestra que

   $$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it|\xi|} h(\xi)\, d\xi = 0.$$

   b) *Equipartición de energía.* Sea u solución de la ecuación de ondas con datos iniciales tales que $f, \nabla f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se definen

   $$E_{\text{kin}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2\, dx, \quad E_{\text{pot}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u(t,x)|^2\, dx, \quad t > 0,$$

   de modo que $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \equiv E(0)$. Demuestra que

   $$\lim_{t\to\infty} E_{\text{kin}}(t) = \lim_{t\to\infty} E_{\text{pot}}(t) = E(0)/2.$$

   Sugerencia: en a) suponer primero que $h \in C_c^\infty$ y usar polares y partes. Después extender a L^1 por densidad. En b) utiliza Plancherel y las sugerencias dadas en clase.

12. Demuestra una desigualdad similar a la del Ejercicio 6 para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$. Para ello, utiliza la correspondiente fórmula explícita vista en clase, y trata de obtener un decaimiento del tipo

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |u(t,x)| \leq C/\sqrt{t}.$$