HOJA 3b: Distribuciones

1. *Convergencia en $\mathcal{D}'$.* Sean $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ distribuciones en $\mathcal{D}'$. Se dice que
$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{en } \mathcal{D}' \quad \text{si} \quad (u_j,\varphi)\to(u,\varphi), \quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}.$$
Dada $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, considera la aproximación de la identidad $f_t(x) = t^{-n}f(x/t)$, $t>0$. Demuestra que
$$\lim_{t\to 0^+} f_t = \delta_{\{0\}} \quad \text{en el sentido de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

2. *Solución fundamental del Δ en $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$.* En este ejercicio se demuestra que $u(x) = c_n/|x|^{n-2}$ cumple $\Delta u = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

   a) Considera $u_\varepsilon(x) = c_n/(|x|^2+\varepsilon^2)^{\frac{n-2}{2}}$, y demuestra que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, cuando $\varepsilon\to 0^+$.

   b) Demuestra que $\Delta(u_\varepsilon)(x) = \varepsilon^{-n}h(x/\varepsilon)$ donde $h\in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} h = 1$ (si c_n es adecuada).

   c) Deduce de lo anterior y del ejercicio 1 que $\Delta u = \delta$.

3. *Solución fundamental de la ecuación del calor.* Sea $W_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ el núcleo del calor en $\mathbb{R}^n$, y sea $G(t,x) := W_t(x)\,\chi_{(0,\infty)}(t)$.

   a) Demuestra que $G\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ y que $G^\varepsilon = G\chi_{[\varepsilon,\infty)}(t)$ converge a G en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

   b) Si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, demuestra que
$$\big(G^\varepsilon, (\partial_t+\Delta_x)\varphi\big) = -[W_\varepsilon * \varphi(\varepsilon,\cdot)](0).$$

   c) Deduce de lo anterior que $(\partial_t-\Delta_x)G = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

4. Sea $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\nabla T = 0$. Demuestra que $T\equiv$ cte.

   Sugerencia: dada una aproximación de la identidad ψ_t, considera $T*\psi_t\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

5. Si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, demuestra que, para $h\to 0$,
$$\frac{\varphi(x+h\mathbf{e}_j)-\varphi(x)}{h} \longrightarrow \partial_{x_j}\varphi(x) \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

6. Demuestra que la derivada distribucional de $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$ cumple
$$\Big([\mathrm{VP}\frac{1}{x}]',\varphi\Big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} - \int_{|x|\ge\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx\Big], \quad \varphi\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

7. Calcula en el sentido de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

(a) $x\delta''$	(b) $x^2\cdot(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x})'$	(c) $(\cos x\,\mathbf{1}_{[0,\infty)})'$
(d) $(x_+^\alpha)'$, si $\alpha\ge 0$	(e) $(x_+^\alpha)'$, si $\alpha\in(-1,0)$	(f) $\lim_{\alpha\to 0^+}\alpha\, x_+^{\alpha-1}$
(g) $(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x})^\wedge$	(h) $(e^{i\alpha\,x^2})^\wedge$, si $\alpha\in\mathbb{R}$	(i) $(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\delta_{Am})^\wedge$, si $\det A\ne 0$

   Nota: En (d)-(f), x_+^α se define como $(x_+^\alpha,\varphi) = \int_0^\infty x^\alpha\varphi(x)\,dx$, si $\alpha>-1$.

   Sugerencia: h) se puede obtener de la fórmula de la TF gaussiana, usando α complejos y continuación analítica.

Ejercicios opcionales

8. *Solución fundamental del* Δ *en* $\mathbb{R}^2$. Sea $u(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|$. Usando $u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\log(|x|^2+\varepsilon^2)$, y argumentos similares al Ejercicio 2, demuestra que $\Delta u = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

9. *Solución distribucional de la cuerda vibrante.* Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $u(t,x) := f(t \pm x)$ demuestra

   a) $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$

   b) $(\partial_{tt} - \partial_{xx})u = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   Sugerencia: En b), una posible estrategia es cambiar variables $x-t=y$, $x+t=z$ en las integrales involucradas.

10. *Densidad de* $\mathcal{D}$ *en* $\mathcal{D}'$. Sea $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\psi = 1$, y sea $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Sea $\chi \in C_c^\infty(B_2(0))$ tal que $0 \le \chi \le 1$ y $\chi|_{B_1(0)} \equiv 1$, y sea $\chi_m(x) = \chi(x/m)$, $m \ge 1$. Demuestra las siguientes propiedades para cada $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

    a) $T * \psi_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $\varepsilon \to 0^+$

    b) $\chi_m T \to T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, si $m \to \infty$

    c) Deduce que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

11. *Caracterización de distribución.* Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Demuestra que

    a) Para todo compacto $K \subset \Omega$ existen constantes $C = C(K,T) > 0$ y $n_0 = n_0(K,T) \in \mathbb{N}$ tales que

    $$(\dagger) \qquad \big|(T,\varphi)\big| \le C \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le n_0} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_\infty, \quad \forall\,\varphi \in C_c^\infty(K).$$

    b) Si $\operatorname{sop} T$ es compacto en Ω, entonces existe un compacto fijo $K_0 \subset \Omega$, y constantes n_0, C_0 tales que

    $$(\ddagger) \qquad \big|(T,\varphi)\big| \le C_0 \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le n_0} \max_{x\in K_0} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(x)|, \quad \forall\,\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

    Sugerencia: En a) razona por reducción al absurdo: si no se cumple ($\dagger$), existen $\varphi_m \in C_c^\infty(K)$ tales que

    $$\big|(T,\varphi_m)\big| > m \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_\infty.$$

    Deduce entonces que $\psi_m = \varphi_m/|(T,\varphi_m)| \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, que contradice $|(T,\psi_m)| = 1$. En b) utiliza que $T = \chi T$ cuando $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\chi|_{\operatorname{sop} T} \equiv 1$, y aplica a).

12. *Orden de una distribución.* Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si existe un entero $n_* \in \mathbb{N}$ tal que las constantes del ejercicio 11.a cumplen $n_0(K,T) \le n^*$ para todo $K \Subset \Omega$, se dice que T es una distribución de orden finito $\le n_*$.

    a) Demuestra que las medidas finitas sobre compactos $\mu \in \mathcal{M}_{\text{reg}}(\Omega)$ son distribuciones de orden 0.

    b) Deduce que las distribuciones $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\delta$ no provienen de una medida (salvo si $\boldsymbol{\alpha} = 0$).

    c) Demuestra que $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$ es una distribución de orden 1, pero no de orden 0.

    d) Demuestra que $(T,\varphi) = \sum_{m=0}^\infty \varphi^{(m)}(m)$ es una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de orden infinito.

13. *Distribuciones con soporte en un punto.* Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{sop} T = \{0\}$.

    a) Demuestra que existen constantes $C_0, R_0 > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$, tales que

    $$|(T,\varphi)| \le C_0 \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le N_0} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\|_{L^\infty(B_{R_0}(0))}, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}.$$

    b) Demuestra que si $\varphi \in \mathcal{D}$ tiene $\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi(0) = 0$, $\forall\,|\boldsymbol{\alpha}| \le N_0$, entonces $(T,\varphi) = 0$.

    c) Deduce que existen constantes $a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}$ tales que

    $$T = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le N_0} c_{\boldsymbol{\alpha}}\delta^{(\boldsymbol{\alpha})}.$$

    Sugerencia: en a) usar el ejercicio 11.b. En b), aproxima φ con funciones φ_m, nulas en un entorno del origen, y utiliza que $(T,\varphi_m) = 0$ y el paso a). En c), dada $\psi \in \mathcal{D}$, aplica b) a las funciones $(\psi - P_{N_0})\chi$, con P_{N_0} el polinomio de Taylor de ψ, y $\chi \in \mathcal{D}$ adecuada.