Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 2: transformada de Fourier

1. **Cálculo de transformadas de Fourier:**

   (a) $f(x) = \operatorname{sign}(x)\, e^{-\alpha|x|}$ (b) $f(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}\chi_{[0,\infty)}$ (c) $f(x) = \sin x\, e^{-x}\ \chi_{[0,\infty)}$

   (d) $f(x) = \chi_{[1/2,1)}(|x|)$ (e) $f = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ (f) $f(x) = e^{-|x|}\cos x$

   (g) $f(x) = xe^{-\pi x^2}$ (h) $f = e^{-\pi(x^2+2x)}$

2. **Propiedades de la TF:** Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demostrar

   (i) *Traslación:* $g(x) = f(x-a) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = e^{-2\pi i a\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$

   (ii) *Dilatación:* $g(x) = f(x/R) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = R^d\hat{f}(R\xi)$

   (iii) *Modulación:* $g(x) = e^{i\eta x}f(x) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \frac{\eta}{2\pi})$

   (iv) *Dilatación matricial:* $g(x) = f(Ax) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = \det(A)^{-1}\hat{f}\big((A^{-1})^t\xi\big)$

   (v) *Laplaciano:* $g(x) = \Delta f(x) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\,\hat{f}(\xi)$.

3. **TF y rotaciones:** (a) Demuestra que el laplaciano en $\mathbb{R}^d$ es invariante por rotaciones:

   $$\Delta(f\circ R) = (\Delta f)\circ R, \quad \forall\, R \in SO_d(\mathbb{R}).$$

   (b) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es una función radial, entonces $\hat{f}$ es también una función radial.

   Sugerencia: En (a), usar (iv)-(v) del ejercicio anterior; en (b) usar que f es radial si y sólo si $f\circ R = f$, para toda rotación R de $\mathbb{R}^d$.

4. **Lema de Riemann-Lebesgue:** demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

   $$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi) = 0.$$

   Sugerencia: Demuéstralo primero para f en C_c^∞, y extiende por densidad.

5. Utiliza la TF para encontrar una solución de la EDO

   $$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), & t \geq 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

   Sugerencia: Quizá necesites hacer antes el ejercicio 1.c.

6. (i) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto, probar que $\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x z}\,dx$, $z \in \mathbb{C}$, define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

   (ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, y si $\operatorname{sop} f$ y $\operatorname{sop}\hat{f}$ son ambos compactos, entonces $f \equiv 0$.

   (iii) Demuestra una versión de (ii) para funciones f en $\mathbb{R}^n$.

   Sugerencia: en (iii), fija $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, y aplica (ii) a la función $g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x')e^{-2\pi i x'\cdot\xi'}\,dx'$.

7. (i) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $|\operatorname{sop} f| < \infty$, demuestra que, para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ medible se tiene

   $$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi \;\leq\; |\operatorname{sop} f|\,|E|\,\|f\|_2^2.$$

   (ii) Deduce que si $E \subset \operatorname{sop}\hat{f}$ es tal que $\int_E |\hat{f}|^2 \geq (1-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}|^2$, entonces

   $$|\operatorname{sop} f|\,|E| \;\geq 1-\varepsilon,$$

   e interprétalo como un principio de incertidumbre.

   Nota: un teorema más fuerte, debido a Benedicks, afirma que para toda $f \not\equiv 0$ se tiene $|\operatorname{sop} f|\,|\operatorname{sop}\hat{f}| = \infty$.

8. Suponer que $f(x)$ es derivable y tal que $f, xf, f' \in L^2(\mathbb{R})$ y $\lim_{|x|\to\infty} |x||f(x)|^2 = 0$. Probar que se cumple la **igualdad de Heisenberg**

$$\left\|xf(x)\right\|_2 \left\|\xi\hat{f}(\xi)\right\|_2 = \frac{1}{4\pi} \left\|f\right\|_2^2.$$

si y sólo si $f(x) = ae^{-bx^2}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

Sugerencia: Revisar la prueba vista en clase, e investigar cuándo se tiene la igualdad de Cauchy-Schwarz.

9. Se define, para $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $t > 0$

$$S_t f(x) = \int_{-t}^{t} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\, d\xi$$

(a) Justificar que la integral anterior está bien definida y converge absolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(b) Encontrar una función $D_t(x)$ tal que $S_t f = f * D_t$.

(c) Probar $\{D_t\}_{t>0}$ no es una aproximación de la identidad regular.

10. a) Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}, \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}.$$

b) Calcula $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$.

Sugerencia: en la primera integral de (a) utiliza residuos. En el resto utiliza las fórmulas de Plancherel o Parseval.

11. Sea $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ : \ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ y $\mathcal{X}_1 = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

a) Demuestra que $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X}_1$

b) Demuestra que si $f \in \mathcal{X}_1$ entonces

(*) $$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad \text{cpt} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Deduce que las funciones de $\mathcal{X}_1$ son continuas (tras modificarlas en un conjunto de medida nula).

Sugerencia: en b) utiliza aproximaciones de la identidad para construir una sucesión $f_n \in \mathcal{X}$ tal que $\hat{f}_n \to \mathcal{F}f$ en las normas de L^1 y L^2. Deduce $(*)$ a partir de su validez para f_n (por el teorema de inversión) y un adecuado paso al límite.

12. Revisa la demostración del teorema de muestreo de Shannon para probar que si $\lambda > 1$ y $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es una función tal que

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv 1, \ \ \xi \in [-B/2, B/2], \quad \text{y} \quad \operatorname{sop} \mathcal{F}\varphi \subset [-\lambda B/2, \lambda B/2],$$

entonces para $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop} \hat{f} \subset [-B/2, B/2]$ se tiene

$$f(t) = L^2\!-\!\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{1}{\lambda B}\, f\Big(\frac{n}{\lambda B}\Big)\, \varphi(t - \tfrac{n}{\lambda B}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Calcula la SF de $\hat{f}(\xi)$ en $L^2(-\lambda B/2, \lambda B/2)$, y utiliza que $\hat{f} = \hat{f}\widehat{\varphi} = SF \cdot \widehat{\varphi}$.

13. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, considera la EDP: $\qquad (P_\lambda) \qquad \Delta u - \lambda^2 u = f$.

a) Demuestra que, si $\alpha > 0$, la función $G_\alpha(x)$ (denominada *potencial de Bessel*), dada por

$$G_\alpha(x) = \tfrac{\pi^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\pi|x|^2}{t}}}{t^{d/2}}\, e^{-\pi t}\, t^{\alpha-1}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

es positiva, está en $L^1(\mathbb{R}^d)$, y su transformada de Fourier es $\widehat{G}_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha}$.

b) Demuestra que si $\lambda \neq 0$ entonces la solución de (P_λ), se puede escribir como

$$u(x) = a_\lambda \int_{\mathbb{R}^d} G_1(b_\lambda(x - y))\, f(y)\, dy,$$

para ciertas constantes a_λ, b_λ que debes determinar.

Opcionales

14. **TF de derivadas.** Demuestra que si $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ la fórmula

$$\widehat{\left(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\right)}(\xi) \;=\; (2\pi i\xi)^{\boldsymbol{\alpha}}\, \hat{f}(\xi), \quad \forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leq N$$

se cumple con las hipótesis mínimas $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\boldsymbol{\alpha}| \leq N$.

Sugerencia: Deduce la fórmula por densidad a partir del caso $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tendrás que usar un resultado de densidad que enuncié en clase para funciones f con las hipótesis de arriba.

15. Calcula la siguiente integral, que aparece a menudo en mecánica cuántica

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x-y|}\, dx\, dy \;=\; 20\,\pi^2.$$

Sugerencia: escribe la integral como $\langle P, K * P\rangle$, para funciones K y P adecuadas en $\mathbb{R}^3$, y utiliza la identidad de Parseval. Este procedimiento debería llevarte a $\int_0^\infty \frac{dr}{(1+r^2)^4}$, que se resuelve con el cambio $r = \tan\theta$ o con el teorema de residuos.

16. Sea $w(t)$ una función real, par y con $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. La *transformada de Fourier con ventana* w (*windowed Fourier transform* o *short-time FT*) de una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$Sf(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(t)\, w(t-x)\, e^{-2\pi i t\xi}\, dt, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Comprobar que $Sf(x,\xi)$ está bien definida y es continua en $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $\|Sf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

(iii) Hallar $Sf(x,\xi)$ cuando la función y la ventana son gaussianas $w(t) = f(t) = e^{-\pi t^2}$.

(iv) La expresión $|Sf(x,\xi)|^2$ se llama *espectrograma de* f. Halla los espectrogramas de $f(t-a)$ y $e^{2\pi i t\eta} f(t)$.

17. En teoría de radar, la *función de ambigüedad* de una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define como el módulo de la correlación entre la señal f y un "eco" generado por ésta, es decir

$$Af(\tau,\eta) \;=\; \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \overline{f(t+\tau)\, e^{2\pi i \eta t}}\, dt \right|, \quad (\tau,\eta) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Probar que $Af(\tau,\eta)$ es continua en $\mathbb{R}^2$, y tiene un máximo en $(\tau,\eta) = (0,0)$.

(ii) Probar que $\|Af\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$.

(iii) Calcular la función de ambigüedad de $\varphi(t) = e^{-a\pi t^2}$, $a > 0$.

(iv) Calcula la función de ambigüedad de $f(t-a)e^{2\pi i t\omega}$.