Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 3: Transformada de Fourier y EDPs

1. *Propiedades de la ecuación del calor.*

   Sea $u(t,x) = W_t * f(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, donde $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Demostrar

   a) *Decaimiento en t:* $\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq c_p \|f\|_p \, t^{-\frac{d}{2p}}$, para todo $t > 0$.

   b) Si $p = \infty$ y $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$, uniformemente en $x \in \mathbb{R}^d$

   c) *Propiedad de semigrupo:*

   $$u(t+s, x) = \big[W_t * u(s,\cdot)\big](x), \quad t, s > 0.$$

   Sugerencia: En c) suponer $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y usar Plancherel, y después extender por densidad.

2. *La ecuación de Laplace en el semiespacio superior.*

   Sea $P_y(x) = c_d \, y/(|x|^2 + y^2)^{\frac{d+1}{2}}$ el núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, sea $u(x,y) = f * P_y(x)$. Demostrar

   a) $\|u(\cdot,y)\|_\infty \leq c_p \|f\|_p \, y^{-d/p}$, para todo $y > 0$.

   b) Si $f \in \mathcal{UC} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = f(x_0), \quad \text{uniformemente en todo } x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

   c) *Propiedad de semigrupo:* $u(x, y_1 + y_2) = \big[P_{y_1} * u(\cdot, y_2)\big](x), \quad y_1, y_2 > 0.$

3. Utiliza Plancherel, e hipótesis adecuadas en u, para probar que

   $$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u|^2 \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2.$$

   Trata de extender la identidad a toda función $u \in C^2 \cap L^2$ tal que $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

4. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 1$:* a partir de la identidad vista en clase

   $$\widehat{u(t,\xi)} \; = \; \hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) \; + \; \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}, \quad t, \xi \in \mathbb{R},$$

   utiliza la transformada inversa de Fourier (con hipótesis adecuadas en f y g) para obtener la *fórmula de D'Alembert*

   $$u(t,x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \; + \; \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\, ds.$$

5. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 3$.*

   a) A partir de las fórmulas vistas en clase, demuestra la siguiente *identidad de Kirchhoff* para la solución $u(t,x)$ de la ecuación de ondas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

   $$\text{(K)} \qquad u(t,x) = \fint_{S_t^2(x)} \Big[f(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x) + t g(y)\Big]\, d\sigma(y).$$

   b) Demuestra que si h es continua en un entorno de x_0 entonces

   $$\lim_{t\to 0} \fint_{S_t^2(x_0)} h(z)\, d\sigma(z) = h(x_0).$$

   c) Deduce de lo anterior que si $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C(\mathbb{R}^2)$ entonces

   $$u(0,x) = f(x) \quad \text{y} \quad u_t(0,x) = g(x).$$

   Nota: un célebre teorema de Stein (1976) afirma que (b) es cierto en ctp $x_0 \in \mathbb{R}^3$ si $h \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p > 3/2$ (y en general falso si $p \leq 3/2$).

6. a) Suponer que $f \in C^1$ y $g \in C$ tienen ambas soporte compacto contenido en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Demuestra que la solución de la ecuación de ondas dada por (K) cumple

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |u(t,x)| \leq \frac{C}{t}, \quad \text{si } t \geq 1,$$

donde $C = C(f,g) > 0$.

b) Trata de demostrar el mismo resultado suponiendo sólo que $|f(y)|, |\nabla f(y)|, |g(y)|$ tienen buen decaimiento, digamos $\leq c/(1+|y|)^N$, con N suficientemente grande (a determinar).

Sugerencia: en a) usar que la medida $\sigma\big(S_t^2(x) \cap B_1(0)\big) \lesssim 1$. En b), dividir $\mathbb{R}^3$ en anillos $\{2^{j-1} \leq |y| < 2^j\}$, $j \geq 1$, y usar que $\sigma\big(S_t^2(x) \cap \{|y| \leq 2^j\}\big) \lesssim 2^{2j}$.

Ejercicios opcionales

7. Sea $W_t(x) = (4\pi t)^{-d/2}\, e^{-|x|^2/4t}$ el núcleo del calor en $\mathbb{R}^d$. Demuestra los siguientes resultados enunciados en clase.

a) Para cada multi-índice $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ existe un polinomio $p_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$ de grado $|\boldsymbol{\alpha}|$ tal que

$$\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}}\big[W_t(x)\big] \;=\; t^{-|\boldsymbol{\alpha}|/2}\, p_{\boldsymbol{\alpha}}(x/\sqrt{t})\, W_t(x),$$

b) Para cada $R > 0$, y cada $\alpha_0 \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ existe una constante $C = C(R, \alpha_0, \boldsymbol{\alpha}, d) > 0$ tal que

$$\max_{t\in[1/R,R]} \max_{|x|\leq R} \Big|\partial_t^{\alpha_0}\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}}\big[W_t(x-y)\big]\Big| \leq C\, e^{-|y|^2/(16R)}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d,$$

c) Deduce que $u(t,x) = f * W_t(x)$ es de clase $C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Nota: en a) procede por inducción en $|\boldsymbol{\alpha}|$. En c), usa el lema de derivación de integrales paramétricas, justificando adecuadamente las hipótesis.

8. a) Si $P_\gamma(x) = 1/(1+|x|^2)^\gamma$, demuestra por inducción que para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$ se tiene

$$\partial_x^{\boldsymbol{\alpha}} P_\gamma(x) = \sum_{j=0}^{|\boldsymbol{\alpha}|} \frac{q_{\boldsymbol{\alpha},j}(x)}{(1+|x|^2)^{\gamma+j}},$$

donde $q_{\boldsymbol{\alpha},j}(x)$ son polinomios de grado $\leq j$.

b) Si $P(x,y) = y^{-d} P_\gamma(x/y)$, demuestra que para todo $L \in \mathbb{N}$, existen constantes c_ℓ tales que

$$\partial_y^L\Big[P(x,y)\Big] = y^{-d-L}\sum_{\ell=0}^{L} c_\ell P_{\gamma+\ell}(x/y).$$

c) Deduce de lo anterior que para cada $R > 0$, $L \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^d$

$$\max_{y\in[1/R,R]} \Big|\partial_y^L \partial_x^{\boldsymbol{\alpha}}[P_\gamma(x,y)]\Big| \leq C_{L,\boldsymbol{\alpha},R}\,(1+|x|^2)^{-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

d) Usando los apartados anteriores, justifica que $u(x,y) = f * P_y(x)$ es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$.

9. Para $d \geq 3$, sean $K(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ y $\vec{G}(x) = \nabla(\frac{1}{|x|^{d-2}}) = (2-d)\frac{x}{|x|^d}$. Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$

a) Demuestra que $K * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

b) Demuestra que $\vec{G} * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

c) Demuestra que $K * f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que se tiene $\nabla[K * f(x)] = \vec{G} * f(x)$.

10. a) Demuestra que la función $h(r) = [\log(1/r)]^\gamma$, $0 < r \leq 1/2$, cumple

$$(\dagger) \qquad h(r) \to \infty, \quad rh'(r) \to 0, \quad r^2 h''(r) \to 0, \quad \text{cuando } r \to 0^+$$

si y sólo si $\gamma \in (0,1)$.

b) Sea $u(x,y) = (x^2 - y^2)h(r)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $h \in C^\infty(0,\infty)$ verifica ($\dagger$). Demuestra que

$$u_{xx}, u_{yy} \notin C(\mathbb{R}^2), \quad \text{pero} \quad \Delta u \in C(\mathbb{R}^2).$$

11. a) Sea $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Demuestra que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it|\xi|} h(\xi)\, d\xi = 0.$$

b) *Equipartición de energía.* Sea u solución de la ecuación de ondas con datos iniciales tales que $f, \nabla f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se definen

$$E_{\text{kin}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2\, dx, \quad E_{\text{pot}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u(t,x)|^2\, dx, \quad t > 0,$$

de modo que $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \equiv E(0)$. Demuestra que

$$\lim_{t\to\infty} E_{\text{kin}}(t) = \lim_{t\to\infty} E_{\text{pot}}(t) = E(0)/2.$$

Sugerencia: en a) suponer primero que $h \in C_c^\infty$ y usar polares y partes. Después extender a L^1 por densidad. En b) utiliza Plancherel y las sugerencias dadas en clase.

12. Demuestra una desigualdad similar a la del Ejercicio 6 para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$. Para ello, utiliza la correspondiente fórmula explícita vista en clase, y trata de obtener un decaimiento del tipo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |u(t,x)| \leq C/\sqrt{t}.$$