Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 1. Transformada de Fourier. Aplicaciones I

1. Utiliza las sugerencias de clase para probar con rigor que, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y si $\operatorname{sop} f$ y $\operatorname{sop} \hat{f}$ son ambos compactos, entonces $f \equiv 0$.

   Sugerencia: fija $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, y aplica el caso $n = 1$ a la función $g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x') e^{-2\pi i x' \cdot \xi'}\, dx'$.

2. (i) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $|\operatorname{sop} f| < \infty$, demuestra que, para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ medible se tiene
$$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \;\le\; |\operatorname{sop} f|\, |E|\, \|f\|_2^2.$$
   (ii) Deduce que, si $f \not\equiv 0$, entonces
$$|\operatorname{sop} f|\, |\operatorname{sop} \hat{f}| \;\ge 1,$$
   e interprétalo como un principio de incertidumbre.

   Nota: un teorema más fuerte, debido a Benedicks, afirma que para toda $f \not\equiv 0$ se tiene $|\operatorname{sop} f|\, |\operatorname{sop} \hat{f}| = \infty$. Esto podría ser un posible trabajo.

3. Sea $\mathbb{X} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \;:\; x f(x), \xi \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$, dotado con la norma
$$\|f\|_{\mathbb{X}} = \|f\|_2 + \|xf\|_2 + \|\xi \hat{f}\|_2.$$
   (i) Demuestra que si $f \in \mathbb{X}$ entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

   (ii) Demuestra que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbb{X}$

   (iii) Demuestra que la *desigualdad de Heisenberg*
$$\big\|x f(x)\big\|_2\, \big\|\xi \hat{f}(\xi)\big\|_2 \;\ge\; \frac{1}{4\pi}\, \big\|f\big\|_2^2.$$
   se cumple para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$.

4. (i) Demuestra la siguiente generalización de la desigualdad de Heisenberg: si $1 \le p \le 2$ entonces
$$\big\|f\big\|_2^2 \;\le\; 4\pi\, \big\|x f(x)\big\|_p\, \big\|\xi \hat{f}(\xi)\big\|_p\,, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
   (ii) Comprueba que si $p \ne 2$, entonces la gaussiana $f(x) = e^{-\pi x^2}$ no cumple la igualdad.

   Sugerencia: revisa la prueba usual, y utiliza las desigualdades de Hölder y Hausdorff-Young. En (ii), calcula el valor de $A_p = \|f\|_2^2 / (4\pi \|xf\|_p \|\xi \hat{f}\|_p)$ y justifica que $A_p < 1$ si $p < 2$, por ejemplo dibujando la gráfica con ordenador.

5. Suponer que se cumple la desigualdad
$$(*) \qquad \|f\|_2^2 \le a\, \|xf\|_2^2 \;+\; b\, \|f'\|_2^2, \quad \forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
   Demuestra que esto implica la desigualdad más fuerte
$$\|f\|_2^2 \le 2\sqrt{ab}\, \|xf\|_2\, \|f'\|_2, \quad \forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$
   Sugerencia: aplica $(*)$ a las funciones $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}\, f(\lambda x)$, y después minimiza la expresión que obtienes con respecto a $\lambda > 0$.

6. a) Demuestra que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx = \infty$$

b) Usando la fórmula de Plancherel (o de Parseval) demuestra

$$\int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^3 dx = \frac{3\pi}{8}.$$

Sugerencia: en (a1) utiliza residuos; en (a2), divide la integral en los intervalos $[n\pi,(n+1)\pi]$ y compara la serie resultante con la serie armónica.

7. Sea $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \;:\; \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ y $\mathcal{X}_1 = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \;:\; \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

a) Demuestra que $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X}_1$

b) Demuestra que si $f \in \mathcal{X}_1$ entonces

$$(*) \qquad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad \text{cpt} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Deduce que las funciones de $\mathcal{X}_1$ son continuas (tras modificarlas en un conjunto de medida nula), en cuyo caso $(*)$ se verifica en todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sugerencia: en b) puedes usar aproximaciones de la identidad para construir una sucesión $f_n \in \mathcal{X}$ tal que $\hat{f}_n \to \mathcal{F}f$ en las normas de L^1 y L^2. Deduce $(*)$ a partir de su validez para f_n (por el teorema de inversión) y un adecuado paso al límite.

8. Denotamos $\operatorname{sinc} x := \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$ cuando $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (y $\operatorname{sinc} 0 = 1$).

a) Demuestra que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\operatorname{sinc}(x-n)|^2\big)^{1/2} \le C$ para alguna constante $C < \infty$

b) Deduce que la serie del teorema de Shannon converge absoluta y uniformemente en todo $t \in \mathbb{R}$

c) Si $\delta \in (0,1)$ y $|x| \le \delta N$, demuestra que $\big(\sum_{|n|>N} |\operatorname{sinc}(x-n)|^2\big)^{1/2} \le C_\delta/\sqrt{N}$

d) Deduce una expresión para el error de truncación en el teorema de Shannon: si $|Bt| \le \delta N$ entonces

$$\Big| f(t) - \sum_{|n|\le N} f\big(\tfrac{n}{B}\big)\operatorname{sinc}(Bt-n)\Big| \le C_\delta \sqrt{B}\, \|f\|_2 \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

9. Revisa la demostración del teorema de muestreo de Shannon para probar que si $\lambda > 1$ y $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es una función tal que

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv 1, \;\; \xi \in [-B/2, B/2], \quad \text{y} \quad \operatorname{sop}\mathcal{F}\varphi \subset [-\lambda B/2, \lambda B/2],$$

entonces para $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}\hat{f} \subset [-B/2, B/2]$ se tiene

$$f(t) = L^2\!-\!\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{1}{\lambda B}\, f\Big(\frac{n}{\lambda B}\Big)\, \varphi(t - \tfrac{n}{\lambda B}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Calcula la SF de $\hat{f}(\xi)$ en $L^2(-\lambda B/2, \lambda B/2)$, y utiliza que $\hat{f} = \hat{f}\widehat{\varphi} = SF\cdot\widehat{\varphi}$.

10. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}\hat{f} \subset [-B/2, B/2]$. Para $A < B$ fijo, definimos

$$f^*(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n/A)\operatorname{sinc}(At-n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Demuestra que $\widehat{f^*}(\xi) = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + nA)\Big)\mathbf{1}_{[-A/2,A/2]}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$

b) Justifica el tipo de convergencia de la serie que define $f^*(t)$

c) Demuestra que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big|f(t) - f^*(t)\big| \le 2\int_{|\xi|>A/2} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi.$$

Sugerencia: en a) representa en serie de Fourier la función periódica $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+nA)$ en $L^2(-\frac{A}{2},\frac{A}{2})$, y después razona como en el teorema de Shannon. En c) comienza con $|f(t)-f^*(t)| \le \int_{\mathbb{R}} |\hat{f} - \widehat{f^*}|\, d\xi = \int_{|\xi|\le A/2} \cdots + \int_{|\xi|>A/2}$, y usando a) trata de llegar a la expresión requerida.