Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 2: Transformada de Fourier. Aplicaciones II (EDPs)

1. *Propiedades de la ecuación del calor.*

   Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, sea $u(t,x) = W_t * f(x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, la solución formal de la ecuación del calor. Demostrar

   a) *Decaimiento en t:* si $1 \le p \le \infty$ entonces

   $$\|u(t,\cdot)\|_\infty \le c_p \|f\|_p \, t^{-\frac{d}{2p}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

   b) *Comportamiento en el infinito:* probar que $u(t,x) \to 0$ cuando $t + |x| \to \infty$.

   c) *Valores máximo y mínimo:* si $f \ge 0$, entonces para todo $t_0 > 0$

   $$\max_{t \ge t_0,\, x \in \mathbb{R}^d} u(t,x) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} u(t_0,x), \quad \text{y} \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^d} u(t_0,x) = 0,$$

   donde el máximo se alcanza, pero el ínfimo no (salvo si $f \equiv 0$).

   Sugerencia: En a) usar Hölder. En b), separar los casos $t \to \infty$ y t acotado con $|x| \to \infty$. En c), usar la propiedad de semigrupo y b).

2. a) Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, utiliza Plancherel para probar que

   $$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^n |\partial_{x_i} \partial_{x_j} u|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2.$$

   b) Extiende la identidad anterior al espacio $\mathbb{H} = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ |\xi|^2 \widehat{u}(\xi) \in L^2\}$.

   c) Deduce que si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\Delta u \in L^2$ entonces $\partial_{x_i}\partial_{x_j} u \in L^2$, $\forall\, i,j = 1,\dots,n$.

   Sugerencia: En b) puedes utilizar (sin demostrar) la densidad de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{H}$.

3. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 3$.*

   a) A partir de las fórmulas vistas en clase, demuestra la siguiente *identidad de Kirchhoff* para la solución $u(t,x)$ de la ecuación de ondas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

   $$\text{(K)} \qquad u(t,x) = \fint_{S_t^2(x)} \Big[f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x) + t g(y) \Big] \, d\sigma(y), \quad t > 0.$$

   b) Demuestra que si h es continua en un entorno de x_0 entonces

   $$\lim_{t \to 0} \fint_{S_t^2(x_0)} h(z) \, d\sigma(z) = h(x_0).$$

   c) Deduce de lo anterior que si $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C(\mathbb{R}^2)$ entonces

   $$\lim_{t \to 0} u(t,x) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{t \to 0} u_t(t,x) = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$

   Nota: un célebre teorema de Stein (1976) afirma que (b) es cierto en ctp $x_0 \in \mathbb{R}^3$ si $h \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p > 3/2$ (y en general falso si $p \le 3/2$).

4. *Desigualdad de dispersión para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$.*

   a) Suponer que $f \in C^1$ y $g \in C$ tienen ambas soporte compacto contenido en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Demuestra que la solución de la ecuación de ondas dada por (K) cumple

   $$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} |u(t,x)| \le \frac{C}{t}, \quad \text{si } t \ge 1,$$

   donde $C = C(f,g) > 0$.

   b) Trata de demostrar el mismo resultado suponiendo sólo que $|f(y)|, |\nabla f(y)|, |g(y)|$ tienen buen decaimiento, digamos $\le c/(1+|y|)^N$, con N suficientemente grande (a determinar).

   Sugerencia: en a) usar que la medida $\sigma\big(S_t^2(x) \cap B_1(0)\big) \lesssim 1$. En b), dividir $\mathbb{R}^3$ en anillos $\{2^{j-1} \le |y| < 2^j\}$, $j \ge 1$, y usar que $\sigma\big(S_t^2(x) \cap \{|y| \le 2^j\}\big) \lesssim 2^{2j}$.

5. Para $d \geq 3$, sean $K(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ y $\vec{G}(x) = \nabla(\frac{1}{|x|^{d-2}}) = (2-d)\frac{x}{|x|^d}$. Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$

   a) Demuestra que $K * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

   b) Demuestra que $\vec{G} * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

   c) Demuestra que $K * f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que se tiene $\nabla[K * f(x)] = \vec{G} * f(x)$.

   Sugerencia: en a) y b) puede ser útil la Prop 8.8 de Folland. En c) intenta dar una prueba directa con la definición de derivada parcial.

6. a) Demuestra que la función $h(r) = [\log(1/r)]^\gamma$, $0 < r \leq 1/2$, cumple

   $$(\dagger) \qquad h(r) \to \infty, \quad rh'(r) \to 0, \quad r^2 h''(r) \to 0, \quad \text{cuando } r \to 0^+$$

   si y sólo si $\gamma \in (0, 1)$.

   b) Sea $u(x, y) = (x^2 - y^2)h(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $h \in C^\infty(0, \infty)$ verifica $(\dagger)$. Demuestra que

   $$u_{xx}, u_{yy} \notin C(\mathbb{R}^2), \quad \text{pero} \quad \Delta u \in C(\mathbb{R}^2).$$

7. a) Sea $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Demuestra que

   $$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it|\xi|} h(\xi)\, d\xi = 0.$$

   b) *Equipartición de energía.* Sea u solución de la ecuación de ondas con datos iniciales tales que $f, \nabla f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se definen

   $$E_{\text{kin}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t, x)|^2\, dx, \quad E_{\text{pot}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u(t, x)|^2\, dx, \quad t > 0,$$

   de modo que $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \equiv E(0)$. Demuestra que

   $$\lim_{t \to \infty} E_{\text{kin}}(t) = \lim_{t \to \infty} E_{\text{pot}}(t) = E(0)/2.$$

   Sugerencia: en a) suponer primero que $h \in C_c^\infty$ y usar polares y partes. Después extender a L^1 por densidad. En b) utiliza Plancherel y las sugerencias dadas en clase.

8. Demuestra una desigualdad similar a la del Ejercicio 4 para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$. Para ello, utiliza la correspondiente fórmula explícita vista en clase, y trata de obtener un decaimiento del tipo

   $$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u(t, x)| \leq C/\sqrt{t}.$$