Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 3: Semigrupos y teorema de Hille-Yosida

1. **Ecuación del calor.** Con la notación de clase, demuestra que la ecuación del calor
$$u_t = \Delta u, \quad u(0) = f, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$
en un problema abstracto de Cauchy bien propuesto en $\mathbb{X} = L^2(\mathbb{R}^d)$; es decir, que el operador Laplaciano Δ con dominio $\mathcal{D}(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^d)$ cumple
$$\Delta \in \mathtt{WP} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^d).$$

2. **Ecuación de ondas.** Con las indicaciones dadas en clase, transforma la ecuación de ondas
$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(0) = f,\ u_t(0) = g, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$
en un problema abstracto de Cauchy en el espacio $\mathbb{X} = H^1(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)$, asociado al operador
$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{con } \mathcal{D}(A) = H^2 \oplus H^1.$$
Demuestra además que $A \in \mathtt{WP}$ en $\mathbb{X}$.

3. Si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un c_0-semigrupo demuestra

   a) Para todo $x \in \mathbb{X}$, la aplicación $t \longmapsto T_t x$ es $\mathcal{C}([0,\infty); \mathbb{X})$

   b) Para todo $x \in \mathbb{X}$, se tiene $\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h T_t x\, dt - x \right\| = 0$

   c) Existen constantes $M, \omega \in \mathbb{R}$ tales que $\|T_t\| \leq M\, e^{\omega t}$, $\forall\, t \geq 0$.

4. Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un c_0-semigrupo tal que, para algún $\omega \in \mathbb{R}$, se cumple
$$(1) \qquad \|T_t\| \leq e^{\omega t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$
   a) Demuestra que el generador infinitesimal A de $\{T_t\}$ cumple
$$(2) \qquad \|(\mu I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu - \omega}, \quad \forall\, \mu > \omega,$$
   b) Demuestra que la propiedad (2) caracteriza a los GI de los semigrupos con propiedad (1).

   Sugerencia: define $\widetilde{T}_t := e^{-t\omega}\, T_t$, y demuestra que es un c_0-semigrupo de contracciones con GI $\widetilde{A} = A - \omega I$; después aplica Hille-Yosida a este semigrupo.

5. Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un c_0-semigrupo tal que, para algún $M \geq 1$, se cumple
$$(3) \qquad \|T_t\| \leq M, \quad \forall\, t \geq 0.$$
   a) Demuestra que $|x| := \sup_{s\geq 0} \|T_s x\|$ es una norma en $\mathbb{X}$ y que se tiene
$$\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad \forall\, x \in \mathbb{X}.$$
   b) Demuestra que T_t es un c_0-semigrupo de **contracciones** en $(\mathbb{X}, |\cdot|)$.

   c) Demuestra que, en la norma usual $\|\cdot\|$, el GI de T_t satisface
$$(4) \qquad \left\|(\mu I - A)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{\mu^n}, \quad \forall\, \mu > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$
   d) **Opcional.** Demuestra que (4) caracteriza a los GI de los semigrupos que cumplen (3).

   Sugerencia: en c) aplica Hille-Yosida en el espacio $(\mathbb{X}, |\cdot|)$. Para d), consultar el libro de Pazy, Thm 5.2, cap 1.

6. En la demostración de Hille-Yosida, se afirmaba que
$$\left\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|, \quad x \in \mathbb{X},$$
donde A_λ son las aproximaciones de Yosida. Escribe una demostración detallada de este hecho.

Opcionales

7. **Cálculo simbólico con semigrupos.** Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un c_0-semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, con generador infinitesimal A.

a) Probar que $L := -A$ es un operador positivo, es decir

$$(Lf, f) \geq 0, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(L).$$

b) Probar las siguientes fórmulas integrales, donde el parámetro $\lambda > 0$

$$\lambda^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t\lambda}\, t^\alpha \, \frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0$$

$$\lambda^\sigma = \frac{1}{\Gamma(-\sigma)} \int_0^\infty \big(e^{-t\lambda} - 1\big) \frac{dt}{t^{1+\sigma}}, \quad \sigma \in (0,1)$$

$$e^{-t\sqrt{\lambda}} = \frac{t}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4s}}\, e^{-s\lambda} \, \frac{ds}{s^{3/2}}, \quad t > 0.$$

Nota: a partir de estas fórmulas, reemplazando formalmente λ por L y $e^{-t\lambda}$ por $e^{-tL} = T_t$, es posible dar una definición explícita de los operadores de potencia fraccionaria

$$L^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty T_t f\, t^\alpha \, \frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0$$

$$L^\sigma f = \frac{1}{\Gamma(-\sigma)} \int_0^\infty \big(T_t f - f\big) \frac{dt}{t^{1+\sigma}}, \quad \sigma \in (0,1)$$

así como del semigrupo de Poisson

$$e^{-t\sqrt{L}} f = \frac{t}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4s}}\, T_s f \, \frac{ds}{s^{3/2}}, \quad t > 0.$$

En este último caso, $u(t) = e^{-t\sqrt{L}} f$ resuelve la EDP

$$u_{tt} = Lu, \quad \text{con } u(0) = f,$$

que cuando $L = -\Delta$ coincide con la ecuación de Laplace en el semiespacio superior. Los laplacianos fraccionarios $(-\Delta)^{-\alpha}$ y $(-\Delta)^\sigma$ son operadores importantes en Análisis Armónico; usando las fórmulas anteriores y la transformada de Fourier se pueden obtener fórmulas explícitas para sus núcleos.