

1. Cálculo de transformadas de Fourier:

- (a)  $f(x) = \text{sign}(x) e^{-\alpha|x|}$       (b)  $f(x) = x^{\alpha-1} e^{-x} \chi_{[0,\infty)}$       (c)  $f(x) = \sin x e^{-x} \chi_{[0,\infty)}$   
 (d)  $f(x) = \chi_{[1/2,1)}(|x|)$       (e)  $f = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$       (f)  $f(x) = e^{-|x|} \cos x$   
 (g)  $f(x) = x e^{-\pi x^2}$       (h)  $f = e^{-\pi(x^2+2x)}$

2. Propiedades de la TF: Para  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , demostrar

- (i) *Traslación:*  $g(x) = f(x - a) \rightarrow \hat{g}(\xi) = e^{-2\pi i a \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$   
 (ii) *Dilatación:*  $g(x) = f(x/R) \rightarrow \hat{g}(\xi) = R^d \hat{f}(R\xi)$   
 (iii) *Modulación:*  $g(x) = e^{i\eta x} f(x) \rightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \frac{\eta}{2\pi})$   
 (iv) *Dilatación matricial:*  $g(x) = f(Ax) \rightarrow \hat{g}(\xi) = \det(A)^{-1} \hat{f}((A^{-1})^t \xi)$   
 (v) *Laplaciano:*  $g(x) = \Delta f(x) \rightarrow \hat{g}(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi)$ .

3. TF y rotaciones: (a) Demuestra que el laplaciano en  $\mathbb{R}^d$  es invariante por rotaciones:

$$\Delta(f \circ R) = (\Delta f) \circ R, \quad \forall R \in SO_d(\mathbb{R}).$$

(b) Demuestra que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  es una función radial, entonces  $\hat{f}$  es también una función radial.

*Sugerencia:* En (a), usar (iv)-(v) del ejercicio anterior; en (b) usar que  $f$  es radial si y sólo si  $f \circ R = f$ , para toda rotación  $R$  de  $\mathbb{R}^d$ .

4. Lema de Riemann-Lebesgue: demuestra que si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

*Sugerencia:* Demuéstralo primero para  $f$  en  $C_c^\infty$ , y extiende por densidad.

5. Demuestra

a) si  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) g(x) dx$

b) si  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  entonces  $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$

6. Utiliza las fórmulas de Plancherel o Parseval para calcular las integrales

(a)  $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$       (b)  $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$       (c)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}$

7. (i) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tiene soporte compacto, probar que  $\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x z} dx$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , define una función holomorfa en todo  $\mathbb{C}$ .

(ii) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , y si  $\text{sop } f$  y  $\text{sop } \hat{f}$  son ambos compactos, deduce que  $f \equiv 0$ .

(iii) Demuestra una versión de (ii) para funciones  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ .

*Sugerencia:* en (iii), fija  $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ , y aplica (ii) a la función  $g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x') e^{-2\pi i x' \cdot \xi'} dx'$ .

8. (i) Si  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  y  $|\text{sop } f| < \infty$ , demuestra que, para todo  $E \subset \mathbb{R}^n$  medible se tiene

$$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq |\text{sop } f| |E| \|f\|_2^2.$$

(ii) Deduce que, si  $f \neq 0$ , se tiene

$$|\text{sop } f| |\text{sop } \hat{f}| \geq 1$$

*Nota:* un teorema más fuerte, debido a Benedicks, afirma que para toda  $f \neq 0$  se tiene  $|\text{sop } f| |\text{sop } \hat{f}| = \infty$ .

9. Suponer  $f(x)$  es derivable tal que  $f, xf, f' \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| |f(x)|^2 = 0$ . Probar que se cumple la **igualdad de Heisenberg**

$$\|xf(x)\|_2 \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2 = \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2.$$

si y sólo si  $f(x) = ae^{-bx^2}$ , con  $a \in \mathbb{R}$  y  $b > 0$ .

*Sugerencia:* Revisar la prueba vista en clase, e investigar cuándo se tiene la igualdad de Cauchy-Schwarz.

10. (i) Demuestra la siguiente generalización de la desigualdad de Heisenberg: si  $1 \leq p \leq 2$  entonces

$$\|f\|_2^2 \leq 4\pi \|xf(x)\|_p \|\xi \hat{f}(\xi)\|_p, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(ii) Comprueba que si  $p \neq 2$ , entonces la gaussiana  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  no cumple la igualdad.

*Sugerencia:* revisa la prueba usual, y utiliza las desigualdades de Hölder y Hausdorff-Young. En (ii), calcula el valor de  $A_p = \|f\|_2^2 / (4\pi \|xf\|_p \|\xi \hat{f}\|_p)$  y justifica que  $A_p < 1$  si  $p < 2$ , por ejemplo dibujando la gráfica con ordenador.

11. Suponer que se cumple la desigualdad

$$(*) \quad \|f\|_2^2 \leq a \|xf\|_2^2 + b \|f'\|_2^2, \quad \forall f \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

Demuestra que esto implica la desigualdad más fuerte

$$\|f\|_2^2 \leq 2\sqrt{ab} \|xf\|_2 \|f'\|_2, \quad \forall f \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

*Sugerencia:* aplica (\*) a las funciones  $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$ , y después minimiza la expresión que obtienes con respecto a  $\lambda > 0$ .

12. Sea  $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$  y  $\mathcal{X}_1 = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ .

a) Demuestra que  $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X}_1$

b) Demuestra que si  $f \in \mathcal{X}_1$  entonces se cumple la fórmula de inversión

$$(*) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad \text{cpt } x \in \mathbb{R}^n.$$

Deduce que las funciones de  $\mathcal{X}_1$  son continuas (tras modificarlas en un conjunto de medida nula).

*Sugerencia:* en b) utiliza aproximaciones de la identidad para construir una sucesión  $f_n \in \mathcal{X}$  tal que  $\hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}f$  en las normas de  $L^1$  y  $L^2$ . Deduce (\*) a partir de su validez para  $f_n$  (por el teorema de inversión) y un adecuado paso al límite.

13. Revisa la demostración del teorema de muestreo de Shannon para probar que si  $\lambda > 1$  y  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  es una función tal que

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv 1, \quad \xi \in [-B/2, B/2], \quad \text{y } \text{sop } \mathcal{F}\varphi \subset [-\lambda B/2, \lambda B/2],$$

entonces para  $f \in L_B^2(\mathbb{R})^*$  se tiene

$$f(t) = L^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda B} f\left(\frac{n}{\lambda B}\right) \varphi\left(t - \frac{n}{\lambda B}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Sugerencia:* Calcula la SF de  $\hat{f}(\xi)$  en  $L^2(-\lambda B/2, \lambda B/2)$ , y utiliza que  $\hat{f} = \hat{f}\hat{\varphi} = SF \cdot \hat{\varphi}$ .

\*En estos ejercicios,  $f \in L_B^2(\mathbb{R})$  significa  $f \in L^2(\mathbb{R})$  con  $\text{sop } \hat{f} \subset [-B/2, B/2]$ .

14. **Truncación en el teorema de muestreo.** Sea  $f \in L^2_B(\mathbb{R})$  y considera

$$S_N f(t) := \sum_{|n| \leq N} f\left(\frac{n}{B}\right) \text{sinc}(Bt - n)$$

la truncación de la serie cardinal de  $f$ . Queremos medir el error de truncación  $|f(t) - S_N(t)|$ .

a) Si  $\delta \in (0, 1)$  y  $|x| \leq \delta N$  demuestra que  $\sum_{|n| > N} |\text{sinc}(x - n)|^2 \leq \frac{c_\delta}{N}$ , para alguna cte  $c_\delta > 0$ .

b) Si  $|t| \leq \delta N/B$  (es decir, si  $t$  no está cerca de los extremos  $\pm \frac{N}{B}$ ) demuestra que

$$|f(t) - S_N(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}} \quad (\text{con } C = c_\delta \sqrt{B} \|f\|_2)$$

c) Si  $f$  adicionalmente cumple que  $t^L f(t)$  es acotado, para algún  $L > 1/2$  entonces

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - S_N(t)| \leq \frac{C}{N^{L-\frac{1}{2}}} \quad (\text{con } C \text{ a determinar}).$$

15. **Reconstrucción con submuestreo.** Sea  $f \in L^2_B(\mathbb{R})$  y  $A < B$ . Considera la función “alias”

$$f^*(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{A}\right) \text{sinc}(At - n), \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Demuestra que  $\widehat{f^*}(\xi) = \left(\frac{1}{A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{A}\right) e^{-2\pi i \xi \frac{n}{A}}\right) \mathbf{1}_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi)$

b) Utiliza una variante del lema de la fórmula de sumación de Poisson para probar que

$$\widehat{f^*}(\xi) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + nA)\right) \mathbf{1}_{[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]}(\xi).$$

c) Utiliza el teorema de inversión y b) para probar

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - f^*(t)| \leq 2 \int_{|\xi| > \frac{A}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi.$$

## Opcionales

16. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  cumple  $\hat{f}(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ , y  $f$  es continua en  $x = 0$ , demuestra que

$$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{y} \quad \|\hat{f}\|_1 = f(0).$$

*Sugerencia:* Revisando la prueba del teorema de inversión, justifica que  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \varphi(t\xi) d\xi$ , donde  $\varphi(y) = e^{-\pi|y|^2}$ . Después usa el TCM.

17. **TF de derivadas.** Demuestra que si  $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$  la fórmula

$$\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \forall |\alpha| \leq N$$

se cumple con las hipótesis mínimas  $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  para  $|\alpha| \leq N$ .

*Sugerencia:* Deduce la fórmula por densidad a partir del caso  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Tendrás que usar un resultado de densidad que enuncié en clase para funciones  $f$  con las hipótesis de arriba.

18. Sea  $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$ . Demuestra que

$$\int_0^\infty f(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \int_0^\infty |f(x)| dx = \infty.$$

*Sugerencia:* Considera la primera como integral impropia de Riemann y utiliza el teorema de los residuos. Para la segunda, escribe  $\int_0^\infty = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1}$  y compara el resultado con la serie armónica.

19. Calcula la siguiente integral, que aparece a menudo en mecánica cuántica

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x-y|} dx dy = 20\pi^2.$$

*Sugerencia:* escribe la integral como  $\langle P, K * P \rangle$ , para funciones  $K$  y  $P$  adecuadas en  $\mathbb{R}^3$ , y utiliza la identidad de Parseval. Este procedimiento debería llevarte a  $\int_0^\infty \frac{dr}{(1+r^2)^4}$ , que se resuelve con el cambio  $r = \tan \theta$  o con el teorema de residuos.

20. Sea  $w(t)$  una función real, par y con  $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ . La *transformada de Fourier con ventana  $w$*  (*windowed Fourier transform* o *short-time FT*) de una señal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se define como

$$Sf(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) w(t-x) e^{-2\pi i t \xi} dt, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Comprobar que  $Sf(x, \xi)$  está bien definida y es continua en  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) Probar que  $\|Sf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .

(iii) Hallar  $Sf(x, \xi)$  cuando la función y la ventana son gaussianas  $w(t) = f(t) = e^{-\pi t^2}$ .

(iv) La expresión  $|Sf(x, \xi)|^2$  se llama *espectrograma de  $f$* . Halla los espectrogramas de  $f(t-a)$  y  $e^{2\pi i t \eta} f(t)$ .