Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 2: transformada de Fourier

1. **Cálculo de transformadas de Fourier:**

   $(a)\ f(x) = \mathrm{sign}(x)\, e^{-\alpha|x|}$ $\quad (b)\ f(x) = x^{\alpha-1}e^{-2\pi x}\chi_{[0,\infty)}$ $\quad (c)\ f(x) = \sin x\, e^{-x}\ \chi_{[0,\infty)}$

   $(d)\ f(x) = \chi_{[1/2,1)}(|x|)$ $\quad (e)\ f = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ $\quad (f)\ f(x) = e^{-|x|}\cos x$

   $(g)\ f(x) = xe^{-\pi x^2}$ $\quad (h)\ f = e^{-\pi(x^2+2x)}$

2. **Propiedades de la TF:** Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, demostrar

   (i) *Traslación:* $g(x) = f(x-a) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = e^{-2\pi i a\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$

   (ii) *Dilatación:* $g(x) = f(x/R) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = R^d\hat{f}(R\xi)$

   (iii) *Modulación:* $g(x) = e^{i\eta x}f(x) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \frac{\eta}{2\pi})$

   (iv) *Dilatación matricial:* $g(x) = f(Ax) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = |\det A|^{-1}\hat{f}\big((A^{-1})^t\xi\big)$

   (v) *Laplaciano:* $g(x) = \Delta f(x) \quad \longrightarrow \quad \hat{g}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\,\hat{f}(\xi)$.

3. **TF y rotaciones:** (a) Demuestra que el laplaciano en $\mathbb{R}^d$ es invariante por rotaciones:

   $$\Delta(f\circ R) = (\Delta f)\circ R, \quad \forall\, R \in SO_d(\mathbb{R}).$$

   (b) Demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ es una función radial, entonces $\hat{f}$ es también una función radial.

   Sugerencia: En (a), usar (iv)-(v) del ejercicio 2; en (b) usar que f es radial si y sólo si $f\circ R = f$, $\forall\, R$.

4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, demuestra

   (i) $\hat{f}(\xi)$ es una función real sii $f(x) = \overline{f(-x)}$

   (ii) $\hat{f}(\xi)$ es real y par sii $f(x)$ es real y par

   (iii) Encuentra $f(x)$ no necesariamente real, tal que $\hat{f}(\xi)$ sea real

5. **Lema de Riemann-Lebesgue:** demuestra que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

   $$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi) = 0.$$

   Sugerencia: Demuéstralo primero para f en C_c^∞, y extiende por densidad.

6. Demuestra

   a) si $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(x)\,g(x)\,dx$

   b) si $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$

7. Utiliza la fórmula de Plancherel para calcular las integrales

   $$(a)\ \int_0^\infty\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^4 dx = \frac{\pi}{3} \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^\alpha} \quad (c)\ \int_{\mathbb{R}}|f(\xi)|^2\,d\xi, \quad \text{si } f(\xi) = \textstyle\int_0^1\sqrt{x}\,\sin(x\xi)\,dx$$

   Sugerencia: En (b), puedes usar la función (b) del ejercicio 1.

8. (i) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto, probar que $\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x z}\, dx$, $z \in \mathbb{C}$, define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

   (ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, y si $\operatorname{sop} f$ y $\operatorname{sop} \hat{f}$ son ambos compactos, deduce que $f \equiv 0$.

   (iii) Demuestra una versión de (ii) para funciones f en $\mathbb{R}^n$.

   Sugerencia: en (iii), fija $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, y aplica (ii) a la función $g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x') e^{-2\pi i x' \cdot \xi'}\, dx'$.

9. (i) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $|\operatorname{sop} f| < \infty$, demuestra que, para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ medible se tiene

$$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \,\leq\, |\operatorname{sop} f|\, |E|\, \|f\|_2^2.$$

   (ii) Deduce que, si $f \not\equiv 0$, se tiene

$$|\operatorname{sop} f|\, |\operatorname{sop} \hat{f}| \,\geq 1$$

   Nota: un teorema más fuerte, debido a Benedicks, afirma que para toda $f \not\equiv 0$ se tiene $|\operatorname{sop} f|\, |\operatorname{sop} \hat{f}| = \infty$.

10. Suponer $f(x)$ es derivable tal que $f, xf, f' \in L^2(\mathbb{R})$ y $\lim_{|x|\to\infty} |x||f(x)|^2 = 0$. Probar que se cumple la **igualdad de Heisenberg**

$$\big\|xf(x)\big\|_2\, \big\|\xi \hat{f}(\xi)\big\|_2 \,=\, \frac{1}{4\pi}\, \big\|f\big\|_2^2.$$

   si y sólo si $f(x) = a e^{-bx^2}$, con $a \in \mathbb{C}$ y $b > 0$.

   Sugerencia: Revisar la prueba vista en clase, e investigar cuándo se tiene la igualdad de Cauchy-Schwarz.

11. (i) Demuestra la siguiente generalización de la desigualdad de Heisenberg: si $1 \leq p \leq 2$ entonces

$$\big\|f\big\|_2^2 \,\leq\, 4\pi\, \big\|xf(x)\big\|_p\, \big\|\xi \hat{f}(\xi)\big\|_p\,, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

   (ii) Comprueba que si $p \neq 2$, entonces la gaussiana $f(x) = e^{-\pi x^2}$ no cumple la igualdad.

   Sugerencia: revisa la prueba usual, y utiliza las desigualdades de Hölder y Hausdorff-Young. En (ii), calcula el valor de $A_p = \|f\|_2^2/(4\pi\|xf\|_p\|\xi\hat{f}\|_p)$ y justifica que $A_p < 1$ si $p < 2$, por ejemplo dibujando la gráfica con ordenador.

12. Suponer que se cumple la desigualdad

$$(*) \qquad \|f\|_2^2 \leq a\, \|xf\|_2^2 \,+\, b\, \|f'\|_2^2, \quad \forall\, f \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

   Demuestra que esto implica la desigualdad más fuerte

$$\|f\|_2^2 \leq 2\sqrt{ab}\, \|xf\|_2\, \|f'\|_2, \quad \forall\, f \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

   Sugerencia: aplica $(*)$ a las funciones $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}\, f(\lambda x)$, y después minimiza la expresión que obtienes con respecto a $\lambda > 0$.

13. Sea $\mathcal{X} = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \;:\; \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ y $\mathcal{X}_1 = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \;:\; \mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$.

   a) Demuestra que $\mathcal{X} \subsetneq \mathcal{X}_1$

   b) Demuestra que si $f \in \mathcal{X}_1$ entonces se cumple la fórmula de inversión

$$(*) \qquad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad \text{cpt} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

   Deduce que las funciones de $\mathcal{X}_1$ son continuas (tras modificarlas en un conjunto de medida nula).

   Sugerencia: en b) utiliza aproximaciones de la identidad para construir una sucesión $f_n \in \mathcal{X}$ tal que $\hat{f}_n \to \mathcal{F}f$ en las normas de L^1 y L^2. Deduce $(*)$ a partir de su validez para f_n (por el teorema de inversión) y un adecuado paso al límite.

14. Revisa la demostración del teorema de muestreo de Shannon para probar que si $\lambda > 1$ y $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es una función tal que

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) \equiv 1, \;\; \xi \in [-B/2, B/2], \quad \text{y} \quad \operatorname{sop} \mathcal{F}\varphi \subset [-\lambda B/2, \lambda B/2],$$

entonces para $f \in L^2_B(\mathbb{R})^*$ se tiene

$$f(t) \;=\; L^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{1}{\lambda B}\, f\Big(\frac{n}{\lambda B}\Big)\, \varphi(t - \tfrac{n}{\lambda B}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Calcula la SF de $\hat{f}(\xi)$ en $L^2(-\lambda B/2, \lambda B/2)$, y utiliza que $\hat{f} = \hat{f}\widehat{\varphi} = SF \cdot \widehat{\varphi}$.

15. **Truncación en el teorema de muestreo.** Sea $f \in L^2_B(\mathbb{R})$ y considera

$$S_N f(t) := \sum_{|n|\le N} f(\tfrac{n}{B})\, \operatorname{sinc}(Bt - n)$$

la truncación de la serie cardinal de f. Queremos medir el error de truncación $|f(t) - S_N(t)|$.

a) Si $\delta \in (0,1)$ y $|x| \le \delta N$ demuestra que $\displaystyle\sum_{|n|>N} |\operatorname{sinc}(x-n)|^2 \le \frac{c_\delta}{N}$, para alguna cte $c_\delta > 0$.

b) Si $|t| \le \delta N/B$ (es decir, si t no está cerca de los extremos $\pm\frac{N}{B}$) demuestra que

$$|f(t) - S_N(t)| \le \frac{C}{\sqrt{N}} \quad (\text{con } C = \sqrt{c_\delta B}\|f\|_2)$$

c) Si f adicionalmente cumple que $t^L f(t)$ es acotado, para algún $L > 1/2$ entonces

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - S_N(t)| \le \frac{C}{N^{L-\frac{1}{2}}} \quad (\text{con } C \text{ a determinar}).$$

16. **Reconstrucción con submuestreo.** Sea $f \in L^2_B(\mathbb{R})$ y $A < B$. Considera la función "alias"

$$f^*(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tfrac{n}{A})\, \operatorname{sinc}(At - n), \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Demuestra que $\displaystyle\widehat{f^*}(\xi) = \Big(\frac{1}{A}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\tfrac{n}{A}) e^{-2\pi i \xi \frac{n}{A}}\Big)\, \mathbf{1}_{[-\frac{A}{2},\frac{A}{2}]}(\xi)$

b) Utiliza una variante del lema de la fórmula de sumación de Poisson para probar que

$$\widehat{f^*}(\xi) = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + nA)\Big)\, \mathbf{1}_{[-\frac{A}{2},\frac{A}{2}]}(\xi).$$

c) Utiliza el teorema de inversión y b) para probar

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - f^*(t)| \le 2\int_{|\xi|>\frac{A}{2}} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi.$$

[*] En estos ejercicios, $f \in L^2_B(\mathbb{R})$ significa $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop}\hat{f} \subset [-B/2, B/2]$.

Opcionales

17. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ cumple $\hat{f}(\xi) \geq 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^d$, y f es continua en $x = 0$, demuestra que

$$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{y} \quad \|\hat{f}\|_1 = f(0).$$

Sugerencia: Revisando la prueba del teorema de inversión, justifica que $f(0) = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(t\xi)\,d\xi$, donde $\varphi(y) = e^{-\pi|y|^2}$. Después usa el TCM.

18. **TF de derivadas.** Demuestra que si $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ la fórmula

$$\widehat{\left(\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\right)}(\xi) \;=\; (2\pi i\xi)^{\boldsymbol{\alpha}}\, \hat{f}(\xi), \quad \forall\, |\boldsymbol{\alpha}| \leq N$$

se cumple con las hipótesis mínimas $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\boldsymbol{\alpha}| \leq N$.

Sugerencia: Deduce la fórmula por densidad a partir del caso $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tendrás que usar un resultado de densidad que enuncié en clase para funciones f con las hipótesis de arriba.

19. Calcula la siguiente integral, que aparece a menudo en mecánica cuántica

$$\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x-y|}\,dx\,dy \;=\; 20\,\pi^2.$$

Sugerencia: escribe la integral como $\langle P, K * P\rangle$, para funciones K y P adecuadas en $\mathbb{R}^3$, y utiliza la identidad de Parseval. Este procedimiento debería llevarte a $\int_0^\infty \frac{dr}{(1+r^2)^4}$, que se calcula como en el Ejerc 7b.

20. Sea $w(t)$ una función real, par y con $\|w\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. La *transformada de Fourier con ventana* w (*windowed Fourier transform* o *short-time FT*) de una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$Sf(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(t)\,w(t-x)\,e^{-2\pi i t\xi}\,dt, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Comprobar que $Sf(x,\xi)$ está bien definida y es continua en $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $\|Sf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

(iii) Hallar $Sf(x,\xi)$ cuando la función y la ventana son gaussianas $w(t) = f(t) = e^{-\pi t^2}$.

(iv) La expresión $|Sf(x,\xi)|^2$ se llama *espectrograma de* f. Halla los espectrogramas de $f(t-a)$ y $e^{2\pi i t\eta} f(t)$.

21. Utiliza la fórmula de sumación Poisson para probar la identidad, para $a > 0$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|} = \frac{\pi/a}{\tanh(\pi a)}.$$

22. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, con $f \not\equiv 0$, tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y sean $E, F \subset \mathbb{R}^d$.

a) Demuestra que $\quad |E|\cdot|F| \geq \dfrac{\int_E |f|\,dx\ \int_F |\hat{f}|\,d\xi}{\|f\|_1\,\|\hat{f}\|_1}$.

b) Deduce que $\quad |\mathrm{sop}\, f|\cdot|\mathrm{sop}\, \hat{f}| \geq 1$.

c) Suponer que f está ε-localizada en E y $\hat{f}$ está δ-localizada en F, es decir

$$\int_{E^c} |f| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |f| \quad \text{y} \quad \int_{F^c} |\hat{f}| \leq \delta \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}|.$$

Demuestra que en ese caso se debe tener $|E|\cdot|F| \geq (1-\varepsilon)(1-\delta)$.

Sugerencia: En a) comienza probando $\int_E |f| \leq |E|\,\|f\|_\infty \leq |E|\,\|\hat{f}\|_1$, y algo similar para $\int_F |\hat{f}|$.

23. *Teorema de Faris.* Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $xf(x) \in L^2$.

a) Demuestra que $f \in L^1$ y se tiene

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{2\pi}\, \|f\|_1^{1/2}\, \|xf(x)\|_2^{1/2}.$$

b) Demuestra que para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_E |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi \;\leq\; 2\pi\, |E|\, \|xf(x)\|_2\, \|f\|_2.$$

c) Si $\|f\|_2 = 1$ y $\|xf(x)\|_2$ es pequeño, la desigualdad de Heisenberg dice que $\|\xi \hat{f}(\xi)\|_2$ debe ser grande. ¿Podría ocurrir que $\hat{f}$ esté localizada en dos intervalos pequeños pero alejados entre sí?

Sugerencia: En a) utiliza Cauchy-Schwarz para estimar $\int |f(x)|\sqrt{\lambda^2+x^2}\frac{dx}{\sqrt{\lambda^2+x^2}}$, y después minimiza en λ. En b) comienza con $\int_E |\hat{f}|^2 \leq |E|\, \|\hat{f}\|_\infty^2 \leq |E|\, \|f\|_1^2$, y después usa a).