Análisis Matemático Aplicado I. Máster en Matemáticas

HOJA 3: Transformada de Fourier. Aplicaciones a EDPs

1. *Decaimiento de soluciones de la ecuación del calor.*

   Sea $u(t,x) = W_t * f(x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, la solución formal de la ecuación del calor con dato inicial $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$. Demostrar

   a) *Decaimiento en t:*
$$\|u(t,\cdot)\|_\infty \le c_p \|f\|_p \, t^{-\frac{d}{2p}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

   b) *Decaimiento en $|x|$:* para cada $T_1 > T_0 > 0$ se tiene
$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x) \to 0, \quad \text{uniformemente en } t \in [T_0, T_1].$$

   c) En b) prueba que de hecho la convergencia es uniforme en $t \in [T_0, \infty)$?

   Sugerencia: En a) usar Hölder. En b) usar Hölder y TCD. En c) usar a) y b).

2. *La ecuación de Laplace en el semiespacio superior.*

   Sea $u(x,y) = f * P_y(x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, la solución formal de la ecuación de Laplace, donde $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ es el dato de frontera, y P_y es el núcleo de Poisson. Demostrar

   a) $\|u(\cdot,y)\|_\infty \le c_p \|f\|_p \, y^{-d/p}$, para todo $y > 0$.

   b) Si $f \in \mathcal{UC} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = f(x_0),$$

   c) *Propiedad de semigrupo:* $\quad u(x, y_1 + y_2) = \big[P_{y_1} * u(\cdot, y_2)\big](x), \quad y_1, y_2 > 0.$

3. *Regularidad C^1 de las soluciones de la ecuación de Poisson.*

   Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, con $d \ge 3$, y considera los núcleos $K(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}$ y $\vec{G}(x) = \nabla(\frac{1}{|x|^{d-2}}) = \frac{(2-d)x}{|x|^d}$.

   a) Demuestra que $K * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

   b) Demuestra que $\vec{G} * f(x)$ está bien definida y es continua en todo $x \in \mathbb{R}^d$.

   c) Demuestra que $K * f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que se tiene $\nabla[K * f(x)] = \vec{G} * f(x)$.

   Sugerencia: en a) y b) puede ser útil la Prop 8.8 de Folland. En c) intenta dar una prueba directa con la definición de derivada parcial.

4. *Regularidad en L^2 de la ecuación de Poisson.* Sea $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\Delta u \in L^2$.

   a) Demuestra que $\partial_{x_j} u$ y $\partial_{x_i}\partial_{x_j} u \in L^2$, y acota sus normas en términos de $\|\Delta u\|_2$.

   b) Utiliza Plancherel para probar que
$$\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,j=1}^{d} |\partial_{x_i}\partial_{x_j} u|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2.$$

   Nota: Para ser rigurosos, en a) se debe usar la noción de derivada débil del Ejerc 13.b.

5. *Ecuación de ondas en dimensión $d = 3$.*

   a) A partir de las fórmulas vistas en clase, demuestra la siguiente *identidad de Kirchhoff* para la solución $u(t,x)$ de la ecuación de ondas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

   (K) $$u(t,x) = \fint_{S^2_t(x)} \Big[f(y) + \nabla f(y) \cdot (y - x) + t g(y)\Big] \, d\sigma(y), \quad t > 0.$$

b) Demuestra que si h es continua en un entorno de x_0 entonces

$$\lim_{t\to 0} \fint_{S^2_t(x_0)} h(z)\,d\sigma(z) = h(x_0).$$

c) Deduce de lo anterior que si $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y $g \in C(\mathbb{R}^3)$ entonces

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = f(x) \quad \text{y} \quad u_t(0,x) = \lim_{t\to 0} \frac{u(t,x)-u(0,x)}{t} = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$

Nota: un célebre teorema de Stein (1976) afirma que (b) es cierto en ctp $x_0 \in \mathbb{R}^3$ si $h \in L^p(\mathbb{R}^3)$ con $p > 3/2$ (y en general falso si $p \leq 3/2$).

6. *Desigualdad de dispersión para la ecuación de ondas en* $\mathbb{R}^3$.

a) Suponer que $f \in C^1$ y $g \in C$ tienen ambas soporte compacto contenido en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Demuestra que la solución de la ecuación de ondas dada por (K) cumple

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |u(t,x)| \leq \frac{C}{t}, \quad \text{si } t \geq 1,$$

donde $C = C(f,g) > 0$.

b) Trata de demostrar el mismo resultado suponiendo sólo que $|f(y)|, |\nabla f(y)|, |g(y)|$ tienen buen decaimiento, digamos $\leq c/(1+|y|)^N$, con N suficientemente grande (a determinar).

Sugerencia: en a) usar que la medida $\sigma\big(S^2_t(x) \cap B_1(0)\big) \lesssim 1$. En b), dividir $\mathbb{R}^3$ en anillos $\{2^{j-1} \leq |y| < 2^j\}$, $j \geq 1$, y usar que $\sigma\big(S^2_t(x) \cap \{|y| \leq 2^j\}\big) \lesssim 2^{2j}$.

7. *Conservación de energía en la ecuación de ondas.*

Considera la solución formal encontrada en clase

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi} \left[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}\right] d\xi.$$

Demuestra usando Plancherel que la siguiente función de energía es constante

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \Big(|u_t(t,x)|^2 + |\nabla_x u(t,x)|^2\Big)\,dx$$

con hipótesis adecuadas en f y g (digamos $f, g \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$).

8. *La ecuación de ondas no homogénea.*

a) Demuestra que si $F(t,x)$ es suficientemente suave, la ecuación de ondas no homogénea

$$u_{tt} = \Delta_x u + F(t,x) \quad \text{en } (0,\infty)\times\mathbb{R}^d, \quad \text{con } u(0,x) = u_t(0,x) = 0$$

tiene como solución la integral de Duhamel

$$(\dagger) \qquad u(t,x) = \int_0^t v(t,x;s)\,ds$$

donde, para cada $s > 0$, la función $v(t,x;s)$ es la solución de la ecuación de ondas homogénea

$$v_{tt} = \Delta_x v \quad \text{en } (s,\infty)\times\mathbb{R}^d, \quad \text{con } v(s,x) = 0,\ v_t(s,x) = F(s,x).$$

b) Trata de interpretar físicamente el significado de $(\dagger)$.

9. *Ecuación de ondas con rozamiento.* Si $\mu > 0$, considera la EDP

$$u_{tt} + 2\mu u_t = \Delta_x u, \quad \text{con} \quad u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = g(x).$$

Utilizando el método visto en clase trata de llegar a la solución formal

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\cdot\xi}\,\big[\hat{g}(\xi)\,e^{-\mu t}\,w(t,\xi)\big]\,d\xi,$$

donde

$$w(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(t\sqrt{|2\pi\xi|^2-\mu^2}\right)}{\sqrt{|2\pi\xi|^2-\mu^2}}, & si \quad 2\pi|\xi| > \mu \\[2ex] \dfrac{\sinh\left(t\sqrt{\mu^2-|2\pi\xi|^2}\right)}{\sqrt{\mu^2-|2\pi\xi|^2}}, & si \quad 2\pi|\xi| < \mu \end{cases}$$

Ejercicios opcionales

10. *Desigualdad de dispersión para la ecuación de ondas en* $\mathbb{R}^2$.

Demuestra una desigualdad similar a la del Ejercicio 6 para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$. Para ello, utiliza la correspondiente fórmula explícita vista en clase, y trata de obtener un decaimiento del tipo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |u(t,x)| \le C/\sqrt{t}.$$

11. *Otra desigualdad de dispersión para la ecuación de ondas en* $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestra que si $f \in W^{2,1}$ y $g \in W^{1,1}$ se tiene

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |u(t,x)| \le \frac{C}{t}\left(\|f\|_{W^{2,1}} + \|g\|_{W^{1,1}}\right), \quad t \ge 1.$$

b) Demuestra que la desigualdad anterior se puede mejorar a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} |u(t,x)| \le \frac{C}{t}\left(\|D^2 f\|_{L^1} + \|\nabla g\|_{L^1}\right), \quad t > 0.$$

Nota: Por simplicidad, considera $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, dando por hecho que la desigualdad se extiende por densidad.
Sugerencia: en a) supón primero que $f \equiv 0$ y demuestra usando el teorema de la divergencia que

$$\Big|\fint_{S_t(x)} g\, d\sigma_t\Big| \le \fint_{B_t(x)} |g| + \fint_{B_t(x)} t\,|\nabla g|.$$

En b), puedes usar $g(z_1, z') = \int_{-\infty}^{z_1} g_{x_1}(s, z')\, ds$ para probar que

$$\int_{B_t(x)} |g(z)|\, dz \le 2t\|g_{x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \quad \text{y} \quad \int_{B_t(x)} |f(z)|\, dz \le 4t^2\|f_{x_1x_2}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

12. *Equipartición de energía.*

a) Sea $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Demuestra que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} e^{it|\xi|} h(\xi)\, d\xi = 0.$$

b) Sea u solución de la ecuación de ondas con datos iniciales tales que $f, \nabla f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Se definen

$$E_{\text{kin}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2\, dx, \quad E_{\text{pot}}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x u(t,x)|^2\, dx, \quad t > 0,$$

de modo que $E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) \equiv E(0)$. Demuestra que

$$\lim_{t\to\infty} E_{\text{kin}}(t) = \lim_{t\to\infty} E_{\text{pot}}(t) = E(0)/2.$$

Sugerencia: en a) suponer primero que $h \in C_c^\infty$ y usar polares y partes. Después extender a L^1 por densidad. En b) utiliza Plancherel en $E_{\text{kin}}(t)$, desarrolla cuadrados, y concluye aplicando a).

13. *Derivada débil en L^2.* Dada $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, definimos su derivada débil $\partial_{x_j} u$ como el operador

$$\big(\partial_{x_j} u, \varphi\big) := -\int u(x)\, \partial_{x_j}\varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

y decimos que $\partial_{x_j} u \in L^2$ si existe una función $v \in L^2$ tal que $\big(\partial_{x_j} u, \varphi\big) = \int v\, \varphi$, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty$.

a) Demuestra que si $u \in C^1$ entonces $\partial_{x_j} u$ coincide con la derivada usual

b) Demuestra que $\partial_{x_j} u \in L^2$ si y sólo si $\xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2$. En ese caso, además, $\partial_{x_j} u = \mathcal{F}^{-1}\big(2\pi i \xi_j \hat{u}\big)$.

c) Si $d = 1$, considera $u(x) = |x|\, \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, donde $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\psi(x) = 1$ si $x \in [-1, 1]$. Demuestra que u no es derivable en el sentido usual, pero sí es derivable en $L^2(\mathbb{R})$ y

$$\partial_x u(x) = \operatorname{sign}(x)\, \psi(x) + |x|\, \psi'(x).$$

14. *Contraejemplo de regularidad para la ecuación de Poisson en $C(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$.*

a) Demuestra que si $\gamma \in (0, 1)$ la función $h(r) = [\log(1/r)]^\gamma$, $0 < r \leq 1/2$, cumple

$$(\dagger) \qquad h(r) \to \infty, \quad r h(r) \to 0, \quad r h'(r) \to 0, \quad r^2 h''(r) \to 0, \quad \text{cuando } r \to 0^+$$

b) Sea $u(x, y) = (x^2 - y^2) h(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y h es una función en $C^\infty(0, \infty)$ que verifica ($\dagger$). Demuestra que

$$u \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad \Delta u \in C(\mathbb{R}^2) \quad \text{pero} \quad u_{xx}, u_{yy} \notin C(\mathbb{R}^2).$$