Hoja 1: La ecuación de la cuerda vibrante

1. Demuestra que la constante c^2 en la ecuación de la cuerda vibrante tiene unidades de velocidad al cuadrado.

2. Esboza la gráfica de la solución $u(t,x)$ del siguiente problema de la cuerda punteada

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

donde $f(x) = 3x$, $0 \leq x \leq 1/3$, y $f(x) = \frac{3}{2}(1-x)$ si $1/3 \leq x \leq 1$. La solución es una función lineal a trozos, ¿sabrías decir qué pendiente tiene en cada trozo?

Sugerencia: puedes usar *Maxima* u otro programa informático.

3. Encuentra una fórmula para la solución de

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

en los siguientes casos: $g(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) \equiv 1$, $x \in (0,1)$.

4. Sea $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ de clase $C^2[0,L]$. Denotamos por $\tilde{f}$ a la extensión de f que es impar en $[-L,L]$ y $2L$-periódica en $\mathbb{R}$.

a) Demuestra que $\tilde{f} \in C(\mathbb{R})$ si y sólo si $f(0^+) = f(L^-) = 0$

b) Si se cumple a), demuestra que también se tiene $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$.

c) Demuestra que $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R})$ si y sólo si $f''(0^+) = f''(L^-) = 0$

5. Demuestra que la expresión $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ se puede escribir como

(i) $A\cos(\omega t - \varphi)$, donde $A = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\varphi = \arctan(b/a)$

(ii) $c_1 e^{i\omega t} + c_{-1}e^{-i\omega t}$, con c_1, c_{-1} a determinar.

6. Justifica que la posición $u(t,x)$ de una cuerda vibrante, cuando se tiene en cuenta la gravedad, viene dada por la EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g. \tag{1}$$

a) Si los extremos están fijos $u(t,0) = u(t,L) = 0$, determina la posición de equilibrio $\bar{u}(x)$ en que queda la cuerda cuando no hay movimiento.

b) En el apartado anterior, ¿cuál es la posición más baja en que queda la cuerda? ¿Cómo varía si duplicamos la longitud? ¿Y si duplicamos la densidad o la tensión?

c) Demuestra que toda solución de (1) puede escribirse como $u(t,x) = v(t,x) + \bar{u}(x)$, donde v es solución de $v_{tt} = c^2 v_{xx}$. Utiliza este hecho para dar una fórmula para la solución de (1) cuando $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = 0$, $x \in (0,L)$.

7. Considera la EDP $\partial_t u + c\, u_x = 0$, $t, x \in \mathbb{R}$.

a) Demuestra que $u(t,x)$ es una solución de clase $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ si y sólo si $u(t,x) = f(x-ct)$ para algún $f \in C^1(\mathbb{R})$.

b) Resuelve la EDP

$$u_t + 2u_x = x, \qquad \text{con } u(0,x) = 0.$$

Sugerencia: en (a) utiliza el mismo razonamiento que en el lema de D'Alembert. En (b) encuentra primero una solución particular $\bar{u}(x)$ independiente de t.

8. Para una cuerda de violín de longitud 33 cm, masa 2 gr y cuyo armónico principal vibra a 440 Hz, determina el valor de las constantes c, τ, ρ.

   Sugerencia: recuerda que el armónico principal tiene longitud de onda $\lambda_1 = 2L$ y frecuencia $f_1 = c/\lambda_1$.

9. Encuentra una fórmula para la solución de la ecuación de la cuerda con extremos que se mueven libremente:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,L),\ t \in \mathbb{R}.$$

   Sugerencia: Si usas el método de D'Alembert, posiblemente necesites extensiones *pares* de f, g. Alternativamente, puedes obtener la fórmula a partir de $v(t,x) = u_x(t,x)$, que satisface una EDP con extremos fijos...

Opcionales:

10. *Ecuación del transporte*: la densidad de tinta en un fluido que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se puede modelizar con la EDP

$$\partial_t u + \mathbf{v} \cdot \nabla_x u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

   a) Trata de justificar el modelo físico

   b) Demuestra que $u(t,x)$ es una solución de la EDP en $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ si y sólo si $u(t,x) = f(x - t\mathbf{v})$ para algún $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

   c) Si $F(t,x)$ es continua en t y C^1 en x, demuestra que

$$u(t,x) = f(x - ct) + \int_0^t F(s, x - c(t-s))\, ds, \quad \text{para } f \in C^1(\mathbb{R}),$$

   es la solución general de la ecuación del transporte no homogenea: $u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = F(t,x)$.

   Sugerencia: En a) puedes razonar como sigue: si $\mathbf{x}(t)$ denota la posición de una partícula fija del fluido (digamos inicialmente en $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$), entonces $u(t, \mathbf{x}(t))$ debe ser constante.