Hoja 4: Series de Fourier

1. Hallar la serie de Fourier de las siguientes funciones de $L^1[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, esbozando sus gráficas y estableciendo en qué puntos se tiene convergencia:

   (a) $f(x)=|x|$

   (b) $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)+\cos^2(2\pi x)$

   (c) $f(x)=|\operatorname{sen}(2\pi x)|$

   (d) $f(x)=e^{ax}$

   (e) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{1}{2}<x<0 \\ \operatorname{sen}(2\pi x) & \text{si } 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}$

   (f) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{1}{2}<x<0 \\ x & \text{si } 0<x<\frac{1}{2} \end{cases}$

   (g) $f_\varepsilon(x)=\begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } |x|\le\varepsilon \\ 0 & \text{si } \varepsilon<|x|<\frac{1}{2} \end{cases}$

   (h) $f_\varepsilon(x)=\begin{cases} 1-\frac{|x|}{\varepsilon} & \text{si } |x|\le\varepsilon \\ 0 & \text{si } \varepsilon<|x|<\frac{1}{2} \end{cases}$

   Nota: Una tabla de soluciones aparece en el libro de Folland "*Fourier Analysis*", pág. 26.

2. Dado un número $\alpha\notin\mathbb{Z}$: (i) demuestra (justificando el tipo de convergencia) que

$$e^{-i\alpha x} = c_\alpha \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}\, e^{ikx}, \quad |x|<\pi,$$

   para una constante c_α apropiada. ¿Qué ocurre cuando $x=\pi$?

   (ii) Utiliza Parseval para probar el siguiente desarrollo en fracciones simples

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi\alpha)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+k)^2}.$$

3. Sabiendo que $x=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\operatorname{sen}(2\pi xx)$, para $|x|<1/2$,

   (i) Hallar la serie de Fourier de x^2 en $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, estableciendo el tipo de convergencia.

   (ii) Calcula las siguientes sumas

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

   (iii) Aplicando Parseval a la función x^2, calcula las sumas

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}, \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.$$

4. Sabiendo que $|x|=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^\infty \frac{\cos[(2k+1)2\pi x]}{(2k+1)^2}$, para $|x|<1/2$, calcula las sumas

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^5}.$$

   Sugerencia: Integra la serie de $|x|$ un número suficiente de veces.

5. *Series de Fourier reales:* Si $f\in L^1[0,1)$, podemos formalmente escribir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \big[a_n\cos(2\pi nx)+b_n\sin(2\pi nx)\big].$$

   a) Expresa a_n y b_n en términos de $\hat{f}(n)$, y viceversa

   b) Demuestra que $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\,dx$

   c) Encuentra una fórmula similar para a_n.

6. *Series de funciones reales, pares e impares.* Sea $f \in L^1[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   (i) Demuestra que f es real si y sólo si $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

   (ii) Demuestra que f es real si y sólo si los coeficientes a_n, b_n del ejercicio 5 son reales.

   (iii) Caracteriza los coeficientes de Fourier $\hat{f}(n), a_n, b_n$ para las funciones pares.

   (iv) Ídem para las funciones impares.

7. *Suavidad implica decaimiento.* Demostrar que si $f \in C^k_{\text{per}}(\mathbb{R})$, entonces

$$\hat{f}(n) = o(1/|n|^k), \quad \text{para } |n| \to \infty.$$

   Sugerencia: Utiliza integración por partes y el lema de Riemann-Lebesgue.

8. *Decaimiento implica suavidad:* Demuestra que si $f \in L^1[0,1)$ es tal que $\widehat{f}(n) = O(1/|n|^{k+2})$ para $|n| \to \infty$, entonces $f \in C^k_{\text{per}}(\mathbb{R})$.

   Nota: Necesitarás citar algún resultado sobre funciones de una variable, que garantice que $\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)) = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$; ver el libro de Spivak.

9. (i) *Fórmula de sumación por partes*: si $S_k = s_0 + s_1 + \ldots + s_k$, demuestra que

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s_k = a_N S_N - \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) S_k.$$

   (ii) *Criterio de Dirichlet*: demuestra que la serie numérica $\sum_{n=0}^\infty a_n s_n$ es convergente cuando

$$a_n \searrow 0, \quad \text{y} \quad \{s_n\} \quad \text{tiene sumas parciales acotadas}$$

   (iii) Demostrar la convergencia de $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots$ y $\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots$.

   Nota: En (iii) hay que justificar que las sumas parciales $|\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) + \ldots + \operatorname{sen}(nx)|$ están acotadas en n (puedes usar series geométricas para calcular esta expresión).

10. (i) Demostrar que la serie $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\log n} \sin(2\pi n x)$ es convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

    (ii) Demostrar que la serie en (i) no es la serie de Fourier de ninguna función integrable.

    Sugerencia: En (ii) utiliza el teorema de integración término a término de series de Fourier.

11. *La desigualdad de Wirtinger:* Sea f una función T-periódica y de clase C^1.

    (i) Si la media $\int_0^T f = 0$, demuestra que

$$\|f\|_{L^2[0,T)} \;\le\; \tfrac{T}{2\pi}\, \|f'\|_{L^2[0,T)}.$$

    (ii) Si $f(0) = f(T) = 0$, demuestra que

$$\|f\|_{L^2[0,T)} \;\le\; \tfrac{T}{\pi}\, \|f'\|_{L^2[0,T)}.$$

    (iii) ¿Sabrías decir para qué funciones se tiene la igualdad en cada caso?

    Sugerencia: En (i) utiliza Parseval. En (ii), extiende f de modo impar a $[-T, T]$ y utiliza (i), apropiadamente adaptado a funciones $2T$-periódicas.