EDPs y series de Fourier *Curso 2016/17*

Hoja 6: La ecuación de ondas en 2D

1. Considera el siguiente problema de la membrana vibrante radial

$$u_{tt} = c^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right], \quad u|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = 0, \quad u_t(0,r) = g(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

a) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0(rs_n)\, \sin(c\, ts_n)$$

donde $0 < s_1 < s_2 < \ldots$ son las raíces positivas de J_0.

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes a_n en función de $g(r)$.

c) Si $g(r) \equiv 1$, demuestra que $a_n = 2/[cs_n^2 J_1(s_n)]$.

d) Trata de dibujar con Maxima la solución (tomando $c = 1$ y digamos 5 términos en la suma).

Sugerencia: En c) puedes usar la fórmula de Sonine que enuncié en clase

$$\int_0^1 (1-r^2)^\nu J_\mu(\lambda r) r^{\mu+1}\, dr = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_{\nu+\mu+1}(\lambda)/\lambda^{\nu+1}, \quad \forall\, \nu, \mu > -1, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

2. *Vibración al golpear un tambor:* Suponer que en el ejercicio anterior tomamos

$$g(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}, \quad \text{si } r \in (0,\varepsilon), \quad \text{y} \quad g(r) = 0 \quad \text{si } r \in [\varepsilon, 1).$$

a) Calcula los coeficientes a_n en este caso.

b) Demuestra que cuando $\varepsilon \to 0^+$, la solución se puede escribir como

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_n)\, \sin(c\, ts_n)}{\pi\, c\, s_n\, J_1(s_n)^2}$$

Sugerencia: En b) usa el primer término de la serie de potencias $J_n(r) = (r/2)^n/(n!) + O(r^{n+2})$, si $r \to 0^+$.

3. *Propagación del calor en el disco $\mathbb{D}$:* Si la temperatura inicial $f(r)$ sólo depende de r, y los extremos del disco están aislados, entonces $u(t,r)$ = temperatura en tiempo t a distancia r, debe cumplir la EDP

$$u_t = \kappa^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right], \quad u_r|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = f(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

(i) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-t\kappa^2\beta_n^2}\, J_0(r\beta_n)$$

donde $0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots$ son las raíces no-negativas de $J_0'(z) = -J_1(z)$.

(ii) Demuestra que $a_n = \dfrac{2}{J_0(\beta_n)^2} \displaystyle\int_0^1 f(r) J_0(\beta_n r)\, r dr$.

(iii) Demuestra que a_0 es el promedio de f en $\mathbb{D}$.

(iv) Si $f(r) = 1 - r^2$, encuentra una expresión exacta para a_n, y esboza la gráfica de $u(t,r)$ con Maxima.

Sugerencia: En b) puedes usar la fórmula $\int_0^1 [J_0(\beta r)]^2 r dr = J_0(\beta)^2/2$, si $J_0'(\beta) = 0$.