EDPs y Series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES — Examen final, 13/6/2017

SOLUCIONES

9'5

1. Para al menos dos de las siguientes ecuaciones, formula la EDP con condiciones iniciales, escribe una solución explícita, y enuncia una propiedad que consideres relevante :

   (i) Ecuación del calor en $\mathbb{R}$

2 (ii) Ecuación de Laplace en el disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$

   (iii) Ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$

   Nota: 2 ptos

2. Sea $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y para $v \in \mathcal{H}$ denotamos $S_N v = \sum_{n\leq N} \langle v, \mathbf{e}_n\rangle \mathbf{e}_n$.

2 a) Demuestra que $\|v - S_N v\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle v, \mathbf{e}_n\rangle|^2$

   b) Deduce de a) la desigualdad de Bessel

   c) Si además $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **base** ortonormal, deduce la identidad de Parseval, es decir

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle v, \mathbf{e}_n\rangle|^2, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}.$$

   Nota: 2 ptos

3. i) Calcula los coeficientes de Fourier de la función $f(x) = ax + bx^2$, si $x \in [0, 1)$.

1'5 ii) Escogiendo a, b, y usando Parseval, demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

   Nota: 1'5 ptos

4. Consideramos la ecuación de Schrödinger en el toro

$$\begin{cases} u_t = \frac{i}{2\pi} u_{xx}, & t > 0,\ x \in \mathbb{T} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{T}. \end{cases}$$

1'3 a) Encuentra una solución de la forma $u(t, x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t) \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$, para coeficientes $a_n(t)$ que debes determinar

   b) Demuestra que si $f \in L^2(\mathbb{T})$ entonces se conserva la energía, es decir

$$E(t) = \int_{\mathbb{T}} |u(t, x)|^2\, dx \;=\; E(0) = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2\, dx$$

   Nota: 1'5 ptos

5. Considera un cilindro vertical de radio 1 y altura L

$$C = \{r \in (0, 1),\ \theta \in [0, 2\pi],\ z \in (0, L)\}.$$

   a) Utilizando separación de variables, encuentra la solución general $u(r, z)$ de la ecuación

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = 0, \qquad \text{en } C,$$

1'8 suponiendo que u se anula en la tapa inferior y en la cara lateral, y que viene dada por una función fija $f(r)$ en la tapa superior.

   b) Encuentra una fórmula para los coeficientes en términos de f

   c) Si $f(r) = J_0(s_3 r)$, donde $s_3 = 8'653...$ es el tercer cero positivo de J_0, esboza $f(r)$ y encuentra una fórmula explícita para $u(r, z)$

   Nota: 2 ptos

6. Escribe las condiciones de contorno asociadas a una temperatura en el equilibrio $u(x, y)$ en una placa rectangular $[0, L] \times [0, M]$ con las siguientes hipótesis: la conductividad térmica es $\kappa = \pi$, el lado izquierdo está siempre a temperatura nula, el lado derecho está aislado, por el lado superior entra un flujo constante de calor igual a 2, y por el lado inferior sale un flujo de calor proporcional a la diferencia entre la temperatura interior y exterior (suponiendo esta última 0°C).

0'9

Nota: 1 pto

(1)

(ii) Ecuación de Laplace en el disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{D} \\ u|_{\partial \mathbb{D}} = \varphi \end{cases}$$

Si $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$, el problema de Dirichlet en el disco $\mathbb{D}$ tiene como solución única $u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \int_0^{2\pi} \varphi(s)\, P_r(\theta - s)\, ds$

donde $P_r = \ldots$

para $r \in (0,1)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, y u cumple:

- $u \in C^\infty(\mathbb{D})$
- $\Delta u = 0$ en $\mathbb{D}$
- $u \in C(\overline{\mathbb{D}})$, es decir, para todo θ_0, $\lim\limits_{\substack{r \to 1^- \\ \theta \to \theta_0}} u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \varphi(\theta_0)$.

La ecuación de Laplace es regularizante, pues si $\varphi \in C(\partial\mathbb{D})$, entonces $u \in C^\infty(\mathbb{D})$.

(iii)

$$(P)\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Si $f \in C^3(\mathbb{R})$ y $g \in C^2(\mathbb{R})$ entonces la única solución de (P) es

$$u(t,x) = \frac{d}{dt}\left[t \fint_{\partial B_t(x)} f\, d\sigma \right] + t \fint_{\partial B_t(x)} g\, d\sigma .$$

La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$ cumple que tiene velocidad de propagación finita.

~~(i) Ecuación del calor en $\mathbb{R}$~~

~~Si $f \in C_c(\mathbb{R})$, $u(t,x) = \int$~~

pide en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xx} \\ \cancel{u(t,0) = u(t,L)} = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$ (varilla ~~de~~ longitud L con extremos nulos)

(i) Ecuación del calor en $\mathbb{R}$

Si $f \in C_c(\mathbb{R})$, $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\, h_t(x-s)\, ds$ cumple

- $\to u \in C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$
- $\to u_t = u_{xx}$
- $\to \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \quad \forall t > 0$
- $\to \lim\limits_{t \to 0} u(t,x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donde $h_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

(Continúa por detrás)

La ecuación del calor tiene la propiedad de que la solución tiene velocidad de propagación infinita. Por ejemplo, en el caso $f = \delta_{\{0\}}$ (delta de Dirac) la solución es $h_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ y como se puede observar, para todo $t > 0$, $h_t(x) > 0$.

(2)

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$

$v \in \mathcal{H} \Rightarrow S_N v = \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n \rangle e_n$

a) En primer lugar, se cumple que ~~$\|S_N < v$~~

$$\|v - S_N v\|^2 = \|v\|^2 + \|S_N v\|^2 \cancel{\sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n\rangle|^2} - 2\,\mathrm{Re}(\langle v, S_N v \rangle)$$

$$\|S_N v\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n \rangle e_n \right\| \underset{\text{Pitágoras}}{=} \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2$$

$$\langle v, S_N v \rangle = \langle v, \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n \rangle e_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \overline{\langle v, e_n \rangle} \langle v, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \|v - S_N v\|^2 = \|v\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2 \underbrace{- 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2 \right)}_{-2 \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2} =$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2$$

✓

b) Por a) $\sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2 = \|v\|^2 - \|v - S_N v\|^2$, luego

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

Como se cumple para cualquier N, tomamos límite cuando $N \to \infty$ y se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2 \leq \|v\|^2$

✓

Si consideramos $f \in L^2(0,1)$ ($\mathcal{H} = L^2(0,1)$), como $\{e^{2\pi i n x}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(0,1)$ y $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x} = \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle$, se llega a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2$$

c) Como $\|v\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle v, e_n \rangle|^2 = \|v - S_N v\|^2$

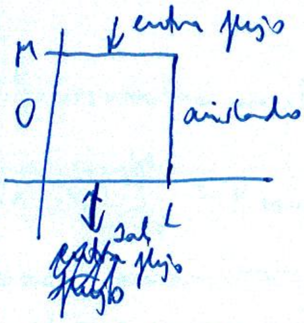
Ya que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal, $\|v - S_N v\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Luego se cumple $\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2$

✓

⑥ $u(x,y)$

placa rectangular $[0,L]\times[0,M]$, $K=\pi$



$$\boxed{\begin{aligned} &u(0,y)=0 \quad \forall y\in[0,M] \ \checkmark \\ &u_x(L,y)=0 \quad \forall y\in[0,M] \ \checkmark \end{aligned}}$$

$\nabla u\cdot\vec{n}=(u_x,u_y)\cdot(1,0)=u_x$

Entra flujo lado superior $\rightarrow$ $K\,\nabla u\,\vec{n}=\Phi_0 \rightarrow \pi\,(u_x,u_y)\cdot(0,1)=2$

$\rightarrow \pi\,u_y=2 \rightarrow \boxed{\pi\,u_y(x,M)=2 \quad x\in[0,L]}$ ✓

Sale flujo lado inferior $\rightarrow$ $\pi\,\nabla u\cdot\vec{n}=K\,(T-u) \rightarrow (u_x,u_y)\cdot(0,-1)=K(0-u)$

~~constante de proporcionalidad~~

$\rightarrow -u_y=-K\,u$

$$\boxed{\pi\,u_y(x,0)=K\,u(x,0) \quad x\in[0,L]}$$

En resumen

$u(0,y)=0 \quad \forall y\in[0,M]$

$u_x(L,y)=0 \quad \forall y\in[0,M]$

$u_y(x,M)=\dfrac{2}{\pi} \quad \forall x\in[0,L]$

$u_y(x,0)=\cancel{\pi}\,u(x,0) \quad \forall x\in[0,L]$

③

i) $f(x) = ax + bx^2 \quad , x \in [0,1)$

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 (ax+bx^2)\, e^{-2\pi i n x}\, dx =$$

$$= a\int_0^1 x\, e^{-2\pi i n x}\, dx + b\int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$n \neq 0$ $$\int_0^1 x\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \left[x\, \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\, dx =$$

$u = x \quad du = 1$

$dv = e^{-2\pi i n x} \quad v = \dfrac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}$

$$= 1 \cdot \frac{e^{-2\pi i n}}{-2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 e^{-2\pi i n x}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-2\pi i n}}{-2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n} \left[\frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \right]_0^1 = \frac{e^{-2\pi i n}}{-2\pi i n} + \frac{1}{2\pi i n}\, \frac{e^{-2\pi i n} - 1}{-2\pi i n} = \frac{1}{-2\pi i n}$$

✓

$$e^{-2\pi i n} = (\cos(2\pi) - i \sin(2\pi))^n = (1-0)^n = 1$$

$n = 0$ $$\int_0^1 x\, e^0\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-2\pi i n x}\, dx = \left[x^2 \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot \frac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}\, dx =$$

$u = x^2 \quad du = 2x$

$dv = e^{-2\pi i n x} \quad v = \dfrac{e^{-2\pi i n x}}{-2\pi i n}$

$$= 1 \cdot \frac{e^{-2\pi i n}}{-2\pi i n} + \frac{2}{2\pi i n} \int_0^1 x\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \frac{1}{-2\pi i n} + \frac{2}{2\pi i n}\, \frac{1}{-2\pi i n} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i n} - \frac{2}{(2\pi i n)^2}$$

✓

$n = 0$ $$\int_0^1 x^2 e^0\, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$\hat{f}(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$$

$(n \neq 0)$ $$\hat{f}(n) = \frac{-(a+b)}{2\pi i n} - \frac{2b}{(2\pi i n)^2}$$ ✓

b) $$ax+bx^2 = \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(\frac{(a+b)}{2\pi i n} + \frac{2b}{(2\pi i n)^2}\right) e^{2\pi i n x}$$

Tomando $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{4\pi^2 n^2} e^{2\pi i n x}$$

Aplicando parseval

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)^2 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{1}{16\pi^4 n^4}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{4}x^3\, dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{20} - \frac{2}{16}x^4\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

$$\frac{1}{120} = \frac{1}{144} + \frac{2}{16\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{720} = \frac{1}{8\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(4) $\begin{cases} u_t = \frac{i}{2\pi} u_{xx} & t>0, x\in\mathbb{T} \\ u(0,x) = f(x) & x\in\mathbb{T} \end{cases}$

a) Si buscamos una solución de la forma $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$

$$u_t(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n'(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$$

$$u_x(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}\,(2\pi i n)$$

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}\,(2\pi i n)^2 =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}\,(-4\pi^2 n^2)$$

$$\frac{i}{2\pi} u_{xx}(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}\, \frac{-i\pi^2 n^2 4}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}\, \frac{-2\pi i n^2}{1}$$

Si exigimos $a_n'(t) = a_n(t)\,(-2\pi i n^2)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ ✓

$$\Rightarrow \boxed{a_n(t) = e^{-2\pi i n^2 t} \cdot a_n(0)}$$

Luego $\boxed{u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n^2 t}\, \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}}$ ✓

b) Si $f\in L^2(\mathbb{T})$

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = E(0)$$

Por otro lado

$$E(t) = \int_{\mathbb{T}} |u(t,x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |e^{-2\pi i n^2}|^2\, |\hat{f}(n)|^2$$

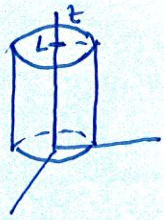
Como

$$|e^{-2\pi i n^2}| = |\cos(-2\pi n^2) + i\,\mathrm{sen}(2\pi n^2)| = |1 + i\cdot 0| = 1$$

$$E(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1\cdot |\hat{f}(n)|^2 \cdot 1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2\,dx = E(0)$$ ✓

(5)

$C = \{ r \in (0,1), \theta \in [0, 2\pi], z \in (0, L) \}$



a) $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = 0$ en C

$u|_{z=0} = 0 \qquad u|_{r=1} = 0 \qquad u|_{z=L} = f(r)$

Aplicamos separación de variables:

$u(r,z) = R(r)\, Z(z)$

$$R''(r)\, Z(z) + \frac{1}{r} R'(r)\, Z(z) + R(r)\, Z''(z) = 0$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \rho = -\lambda^2 \text{ constante}$$

$\cancel{Z''(z) + \rho Z(z) = 0}$

$\cancel{\text{si } \rho > 0 \Rightarrow Z(z) = A\cosh(\sqrt{\rho}\, z) + B\,\text{senh}(\sqrt{\rho}\, z)}$

$\cancel{Z(0) = A = 0 \qquad u(r,0,z)}$

$Z''(z) = \lambda^2 Z(z) \Rightarrow Z(z) = A\cosh(\lambda z) + B\,\text{senh}(\lambda z)$

$Z(0) = A = 0 \Rightarrow Z(z) = B\,\text{senh}(\lambda z)$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} = -\lambda^2$$

$r^2 R''(r) + r R'(r) + r^2\lambda^2 R(r) = 0 \rightarrow R$ cumple la ecuación de Bessel para $n=0$

$R(r) = C\, J_0(\lambda r) + D\, Y_0(\lambda r)$ como $\exists \lim_{r \to 0^+} R(r) \Rightarrow R(r) = C \cdot J_0(\lambda r)$

Como $u|_{r=1} = 0 \Rightarrow R(1) = C \cdot J_0(\lambda) \Rightarrow \lambda$ raíz de J_0, $\lambda \in Z_+(J_0) = \{s_n\}_{n\geq 1}$

$$\Rightarrow \boxed{u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \text{senh}(s_n z)\, J_0(s_n r)}$$

b) $f(r) = u(r,\cancel{\theta},L) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{senh}(s_n L)\, J_0(s_n r)$

$$\int_0^1 f(r)\, J_0(s_m r)\, r\, dr = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{senh}(s_n L)\, J_0(s_n r) \right) J_0(s_m r)\, r\, dr =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{senh}(s_n L) \int_0^1 J_0(s_n r)\, J_0(s_m r)\, r\, dr \underset{\text{ortogonalidad}}{=}$$

$$= A_m \,\mathrm{senh}(s_m L)\, \frac{1}{2} \left(J_1(s_m)\right)^2$$

$$\cancel{\Rightarrow A_m = 2\left(J_1(s_m)\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_m = \frac{2\int_0^1 f(r)\, J_0(s_m r)\, r\, dr}{\mathrm{senh}(s_m L)\left(J_1(s_m)\right)^2}}$$

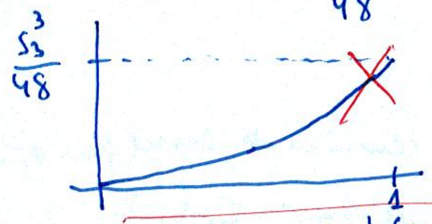
c) $f(r) = J_0(s_3 r) \qquad s_3 = 8.653\ldots$

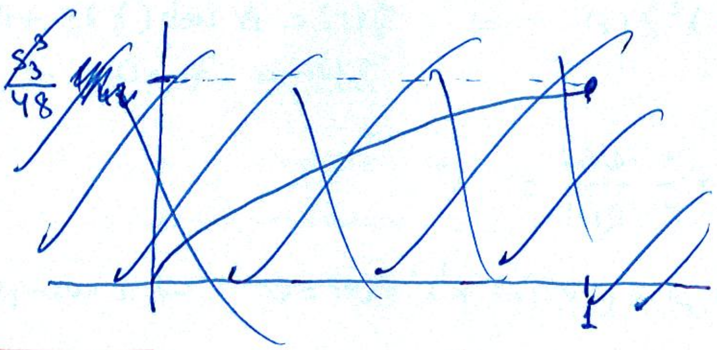
$$A_3 = \frac{2\int_0^1 J_0(s_3 r)\, J_0(s_3 r)\, r\, dr}{\mathrm{senh}(s_3 L)\left(J_1(s_3)\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\mathrm{senh}(s_3 L)} = \frac{1}{\mathrm{senh}(s_3 L)}$$

$$A_m = 0 \quad \forall m \neq 3$$

$$f(r) = \frac{1}{\mathrm{senh}(s_3 L)}\, \mathrm{senh}(s_3 L)\, J_0(s_3 r) = J_0(s_3 r) = \left(\frac{s_3 r}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} + O(r^6)$$

$$J_3(s_m r) \approx \frac{r^3 s_3^3}{48}$$





$$\boxed{u(r,z) = \frac{\mathrm{senh}(s_3 z)}{\mathrm{senh}(s_3 L)}\, J_0(s_3 r)}$$