EDPs y series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES — Test 1, 16/2/2017

Nombre: ....

1. Considera la EDP

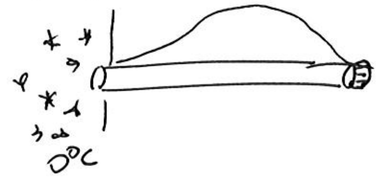
$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0. \qquad \text{(P)}$$

a) ¿A qué problema físico corresponde? ¿Qué significan las condiciones en los extremos?

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Si $\alpha = L = 1$, resuelve (P) cuando $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$, y esboza la gráfica de la solución. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿A partir de qué valor de t es $u(t,x) \le 0'001$, $\forall x$?

a) Ec. calor en varilla de longitud L, con un extremo aislado ($x=L$), y el otro ($x=0$) a temperatura de $u\equiv 0$



Con estas condiciones es de esperar que

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0, \quad \forall x \in (0,L).$$

b) $u(t,x) = U(t)V(x) \to \dfrac{U'(t)}{U(t)} = \alpha \dfrac{V''(x)}{V(x)} = \rho = cte$

como espero soluciones acotadas, puedo suponer $\rho = -\lambda^2$

- $U'(t) = -\lambda^2 U(t) \longrightarrow U(t) = U(0)\, e^{-\lambda^2 t}$
- $V''(x) = -\dfrac{\lambda^2}{\alpha} V(x) \to V(x) = A\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right)$

Busco sol. con $V(0) = V'(L) = 0 \to 0 = V(0) = A$

$\Rightarrow V'(x) = B\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}x\right) \Rightarrow V'(L) = \dfrac{B\lambda}{\sqrt{\alpha}}\cos\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}L\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha}}L = (n+\frac{1}{2})\pi, \quad n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow u(t,x) = B\cdot e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2\alpha t}{L^2}}\cdot \mathrm{sen}\left(\dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi x}{L}\right)$, $n=0,1,2,\dots$

↑ $n=-1,-2,\dots$ dan las mismas soluciones

$\Rightarrow$ La solución general es

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, e^{-\frac{\alpha\pi^2(n+\frac{1}{2})^2 t}{L^2}} \cdot \mathrm{sen}\left((n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi x}{L}\right)}$$

Los coeficientes b_n, en un caso, se determinan

con

$t=0 \longrightarrow \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{L}}$

Usando la relación de ortogonalidad

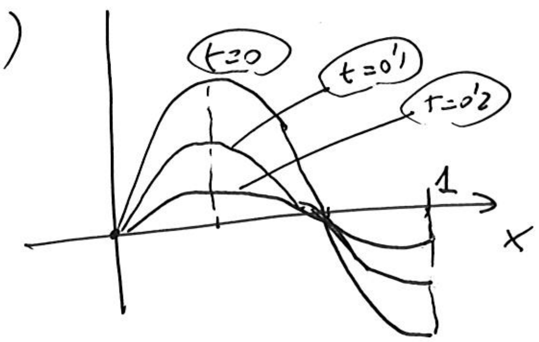
$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{L} \operatorname{sen}\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{L}\, dx \underset{\frac{x}{L}=y}{=} L\int_0^{1} \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi y \operatorname{sen}\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\pi y\, dy = \begin{cases} 2L & \text{si } n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{2L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi\frac{x}{L}\, dx}$$

c) $\boxed{\alpha = L = 1}$ $\quad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$.

En este caso es claro que $b_1 = 1$, $b_n = 0, n\neq 1$.

$$\Rightarrow u(t,x) = e^{-\frac{9\pi^2}{4}t} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$



Se observa que $u(t,x) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$$|u(t,x)| \leq e^{-\frac{9\pi^2 t}{4}} \leq 0'001$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{9\pi^2 t}{4}} \geq 10^3 \Leftrightarrow \frac{9\pi^2 t}{4} \geq 3 \ln 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{4}{3\pi^2}\ln 10 = 0'31 \text{ seg}$$