EDPs y series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES **Test 2, 14/3/2017**

Nombre: SOLUCIONES

10

1. Considera la función signo

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

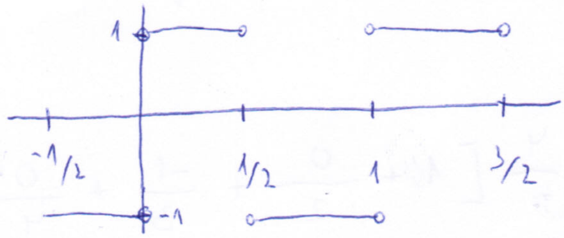
a) Encuentra la serie de Fourier **real** de $\operatorname{sgn}(x)$

b) Justifica si la serie converge y a qué valor, en cada punto $x \in \mathbb{R}$

c) Utiliza lo anterior para calcular $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

d) Determina a qué función corresponde la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi(2n-1)x)}{(2n-1)^2}$.

a)



Como sgn(x) y sen(2πnx) son impares, el producto es par

$$b_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sgn}(x)\,\operatorname{sen}(2\pi n x)\,dx \overset{\downarrow}{=} 4\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi n x)\,dx =$$

$$= 4\left[\frac{-1}{2\pi n}\cos(2\pi n x)\right]_0^{1/2} = \frac{-2}{\pi n}\left[\cos(\pi n) - 1\right] = \frac{-2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n} =$$

$$= \frac{2\left((-1)^{n+1} + 1\right)}{\pi n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \dfrac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$a_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sgn}(x)\cos(2\pi n x)\,dx = 0$$ porque $\operatorname{sgn}(x)\cos(2\pi n x)$ es impar en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Entonces $\boxed{\operatorname{sgn}(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi(2n-1)x)}{2n-1}}$

b) Para $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ la serie converge por el Criterio de Dini versión 1, pues es Lipschitz.

En $x=0$, $f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$, $\lim_{h\to 0^+} f'(h) = 0 = f'(0^+)$ y $\lim_{h\to 0^-} f'(h) = 0 = f'(0^-)$, luego por el Criterio de Dini versión 2, la serie converge en $x=0$ a $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 0$

(En realidad, el tratamiento del caso $x=0$ no es necesario)

En $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$,

$1 = f(\frac{1}{2}^-) = f(-\frac{1}{2}^-)$

$-1 = f(\frac{1}{2}^+) = f(-\frac{1}{2}^+)$

$0 = f'(\frac{1}{2}^+) = f'(\frac{1}{2}^-) = f'(-\frac{1}{2}^+) = f'(-\frac{1}{2}^-)$

Luego por el Criterio de Dini versión 2, la serie en $x = \frac{1}{2}$ converge a $\frac{f(\frac{1}{2}^+) + f(\frac{1}{2}^-)}{2} = 0$ y en $x = -\frac{1}{2}$, converge a $\frac{f(-\frac{1}{2}^+) + f(-\frac{1}{2}^-)}{2} = 0$.

Al resto de puntos, el valor al que converge la serie, se extiende por periodicidad.

En los puntos de la forma $n\frac{1}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$, la serie converge a 0.
En el resto de puntos, la serie converge a la función $sgn(x)$. Muy bien

c) Sustituyendo $x = \frac{1}{4}$ en la serie

$$sgn(\tfrac{1}{4}) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n\frac{\pi}{2})}{n} = \frac{4}{\pi}\left[1 + \frac{0}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{0}{4} + \dots\right]$$

Luego $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$

d) Si integramos la ~~función~~ serie

$$\int_0^x \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2\pi(2n-1)t)}{2n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\int_0^x sen(2\pi(2n-1)t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2 2\pi}\left[\cos(2\pi(2n-1)x) - 1\right] =$$

$$= \frac{-4}{2\pi^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi(2n-1)x)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\right]$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$

Entonces

$$\int_0^x sgn(t)\,dt = \frac{-4}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi(2n-1)x)}{(2n-1)^2} + \underbrace{\frac{4}{2\pi^2}\frac{\pi^2}{8}}_{1/4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi(2n-1)x)}{(2n-1)^2} = \frac{-\pi^2}{2}\left[-\frac{1}{4} + \int_0^x sgn(t)\,dt\right] = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2}\int_0^x sgn(t)\,dt$$

Luego la función que corresponde a la serie es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2}x & \text{si } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2}x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Perfecto!