Hoja 1: La ecuación de la cuerda vibrante

1. Demuestra que la constante c^2 en la ecuación de la cuerda vibrante tiene unidades de velocidad al cuadrado.

2. Esboza la gráfica de la solución $u(t,x)$ del siguiente problema de la cuerda punteada

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

   donde $f(x) = 3x$, $0 \le x \le 1/3$, y $f(x) = \frac{3}{2}(1-x)$ si $1/3 \le x \le 1$. La solución es una función lineal a trozos, ¿sabrías decir qué pendiente tiene en cada trozo?

   Sugerencia: puedes usar *Maxima* u otro programa informático.

3. Encuentra una fórmula para la solución de

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

   en los siguientes casos: $g(x) = \sin(\pi x)$ y $g(x) \equiv 1,\ x \in (0,1)$.

4. Sea $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ de clase $C^2[0,L]$. Denotamos por $\tilde{f}$ su extensión impar y $2L$-periódica en $\mathbb{R}$. Demuestra que

$$\tilde{f} \in C(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad f(0^+) = f(L^-) = 0.$$

   En ese caso, demuestra que además se cumple $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$, y que

$$\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si} \quad f''(0^+) = f''(L^-) = 0.$$

5. Demuestra que la expresión $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ se puede escribir como

   (i) $A\cos(\omega t - \varphi)$, donde $A = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\varphi = \arctan(b/a)$

   (ii) $c_1 e^{i\omega t} + c_{-1} e^{-i\omega t}$, con c_1, c_{-1} a determinar.

6. Justifica que la posición $u(t,x)$ de una cuerda vibrante, cuando se tiene en cuenta la gravedad, viene dada por la EDP

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g. \tag{1}$$

   a) Si los extremos están fijos $u(t,0) = u(t,L) = 0$, determina la posición de equilibrio $\bar{u}(x)$ en que queda la cuerda cuando no hay movimiento.

   b) En el apartado anterior, ¿cuál es la posición más baja en que queda la cuerda? ¿Cómo varía si duplicamos la longitud? ¿Y si duplicamos la densidad o la tensión?

   c) Demuestra que toda solución de (1) puede escribirse como $u(t,x) = v(t,x) + \bar{u}(x)$, donde v es solución de $v_{tt} = c^2 v_{xx}$. Utiliza este hecho para dar una fórmula para la solución de (1) cuando $u(0,x) = f(x)$ y $u_t(0,x) = 0$, $x \in (0,L)$.

7. Considera la EDP $\partial_t u + c\, u_x = 0, \quad t, x \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestra que $u(t,x)$ es una solución de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ si y sólo si $u(t,x) = f(x - ct)$ para algún $f \in C^1(\mathbb{R})$.

   b) Resuelve la EDP

$$u_t + 2u_x = x, \qquad \text{con } u(0,x) = 0.$$

   Sugerencia: en (a) utiliza el mismo razonamiento que en el lema de D'Alembert. En (b) encuentra primero una solución particular $\bar{u}(x)$ independiente de t.

8. Para una cuerda de violín de longitud 33 cm, masa 2 gr y cuyo armónico principal vibra a 440 Hz, determina el valor de las constantes c, τ, ρ.

   Sugerencia: recuerda que el armónico principal tiene longitud de onda $\lambda_1 = 2L$ y frecuencia $f_1 = c/\lambda_1$.

9. Encuentra una fórmula para la solución de la ecuación de la cuerda vibrante con extremos que se mueven libremente, es decir:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = g(x), \quad x \in (0,L), \ t \in \mathbb{R}.$$

   Ayudándote del ordenador esboza la gráfica en el caso punteado $g \equiv 0$, $f(x) = \text{mín}\{x, 1-x\}$, $0 < x < 1$ (con $c = L = 1$).

   Sugerencia: Si usas el método de D'Alembert, posiblemente necesites extensiones *pares* de f, g. Alternativamente, puedes obtener la fórmula a partir de $v(t,x) = u_x(t,x)$, que satisface una EDP con extremos fijos...

Opcionales:

10. *Ecuación del transporte* (generalización del Ejercicio 7): en un fluido que se mueve con velocidad constante $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se deposita una gota de tinta, que viaja arrastrada por la corriente del fluido; la función $u(t,x)$ que mide la densidad de tinta en el punto x tras t seg cumplirá la EDP

$$\partial_t u + \mathbf{v} \cdot \nabla_x u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

   a) Trata de justificar el modelo físico

   b) Demuestra que $u(t,x) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ es solución de la EDP si y sólo si $u(t,x) = f(x - t\mathbf{v})$ donde $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ corresponde a la densidad inicial de tinta.

   c) Suponer que añadimos una fuente externa de tinta de modo que se cumple la *ecuación de transporte no homogenea*

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = F(t,x),$$

   donde $F(t,x)$ es continua en t y C^1 en x. Demuestra que la solución general es

$$u(t,x) = f(x - t\mathbf{v}) + \int_0^t F(s, x - (t-s)\mathbf{v})\, ds, \quad \text{para } f \in C^1(\mathbb{R}).$$

   Sugerencia: En a) puedes razonar como sigue: si $\mathbf{x}(t)$ denota la posición de una partícula fija de tinta (digamos inicialmente en $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$), entonces $u(t, \mathbf{x}(t))$ debe ser constante.