## Hoja 2: La ecuación del calor

1. En la deducción de la ecuación del calor en un sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ utilizamos varias magnitudes físicas. Sabiendo que el flujo $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ tiene unidades de watios/superficie (donde $[W] = [J/\text{seg}]$), y que las de $\sigma$ (calor específico volumétrico) son $[J/({}^\circ k\,\text{Vol})]$, encuentra las unidades de las constantes $\kappa$ (conductividad térmica) y $\alpha = \kappa/\sigma$ (difusividad térmica).

2. En clase resolvimos la ecuación del calor en una varilla con extremos aislados

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0,$$

para la temperatura inicial $u(0,x) = \sin^2(\pi x)$ y $\alpha = 1$. Supón ahora que $\alpha = 0'1$. Encuentra la solución $u(t,x)$ en este caso, esboza su gráfica para varios valores de $t$, y determina a partir de qué valor de $t$ se tiene $|u(t,x) - \frac{1}{2}| < 0'001$, $\forall\, x$. En general, ¿qué papel juega el coeficiente $\alpha$?, ¿cómo afecta a la rapidez con que se alcanza el equilibrio térmico?

3. Resuelve la ecuación del calor en una varilla con extremos nulos

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Si $\alpha = L = 1$, encuentra una fórmula explícita para $u(t,x)$ cuando $f(x) = \sin(\pi x)$, esboza su gráfica y determina cuándo es $|u(t,x)| < 0'001$.

b) Trata de encontrar una fórmula explícita cuando $f(x) = 1$, y si es posible, esboza una gráfica (aproximada) de $u(t,x)$.

*Sugerencia:* En b), intenta escribir $1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$, $x \in (0,1)$, para ciertos coeficientes $b_n$ que puedes determinar como en clase...

4. Ecuación del calor en una varilla con extremos no homogéneos

$$u_t \,=\, \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = \mathtt{T}_0, \quad u(t,L) = \mathtt{T}_1, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Encuentra primero una solución particular del tipo $\bar{u}(x)$.

b) Utiliza a) y la solución del ejercicio 3 para encontrar una solución en forma de serie trigonométrica. Determina una fórmula para los coeficientes si imponemos el dato inicial $u(0,x) = f(x)$.

c) Si $\alpha = L = 1$, determina la solución $u(t,x)$ cuando $\mathtt{T}_0 = 20, \mathtt{T}_1 = 0$ y $f(x) = 0$.

5. *Reacción en cadena para partículas confinadas en un dominio* $\Omega$. En las reacciones nucleares de fisión, la densidad de neutrones $u(t,x)$, en un punto $x \in \Omega$ y en tiempo $t$, cumple la EDP

$$u_t = \mathtt{D}\Delta u \,+\, \alpha u, \quad u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0,$$

para ciertos parámetros $\mathtt{D} > 0$ (difusión del material) y $\alpha > 0$ (tasa creación de neutrones/choque). Suponer que las particulas están confinadas en una varilla unidimensional $\Omega = (-R,R)$.

a) Utiliza separación de variables para encontrar una solución general de la EDP en este caso.

b) Demuestra que puede haber reacción en cadena (es decir, soluciones no acotadas en $t$) cuando $R$ es mayor que el radio crítico $R_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathtt{D}}{\alpha}}$.

c) Encuentra una solución explícita cuando $u(0,x) = \cos(\frac{\pi x}{2R})$, y esboza aproximadamente su gráfica cuando $R > R_c$.

6. Ecuación del calor en una varilla con extremos mixtos.

$$u_t = u_{xx}, \quad u_x(t,0) = \gamma u(t,0), \quad u_x(t,L) = 0, \quad x \in (0,L),\ t > 0.$$

a) Interpreta el significado físico de las condiciones de contorno. ¿Qué debería ocurrir cuando $t \to \infty$?

b) Mediante separación de variables, encuentra una solución general de la EDP en forma de serie trigonométrica.

*Sugerencia:* En a) recuerda que, según la ley de Fourier, $-u_x$ representa el flujo de calor.

7. Suponer dos grandes depósitos de agua salada conectados por un fino tubo de longitud $L$. Sea $u(t,x)$ la concentración de sal en el punto $x$ del tubo en tiempo $t$, que supondremos que cumple la ley de Fick, es decir

$$u_t = D\, u_{xx},$$

para una cierta constante $D > 0$. Se pide describir con una fórmula matemática las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

a) El tubo tiene inicialmente agua pura, y las concentraciones en los depósitos se mantienen constantes $q_1$ y $q_2$.

b) Suponer que $q_2 = 0$ y que para $t \geq 0$ colocamos un filtro que no deja pasar más sal del primer depósito al tubo. Además, en el instante $t = 0$ la concentración en el tubo es una función que decrece linealmente desde $q_1$ hasta 0.

¿Sabrías escribir la solución general de las ecuaciones en (a) y (b)?

8. Considera la EDP

$$u_t = \alpha\, u_{xx}, \quad u(t,0) = u_x(t,L) = 0, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in (0,L),\ t > 0. \qquad \text{(P)}$$

a) ¿A qué problema físico corresponde? ¿Qué significan las condiciones en los extremos?

b) Encuentra una solución general para la EDP mediante separación de variables.

c) Si $\alpha = L = 1$, resuelve (P) cuando $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi x)$, y esboza la gráfica de la solución. ¿Qué ocurre a largo plazo? ¿A partir de qué valor de $t$ es $u(t,x) \leq 0'001$, $\forall\, x$?

**Opcionales:**

9. Sean $u^j(t,x)$, $j = 1,2$, soluciones en $C^{1,2}_{t,x}([0,T] \times [0,L])$ de $u_t = u_{xx}$ con datos

$$u^j(x,0) = f^j(x),\ x \in [0,L], \qquad \text{y} \qquad u^j(t,0) = \phi^j(t),\ \ u^j(t,L) = \psi^j(t), \quad t \in [0,T].$$

Utiliza el principio del máximo para probar la siguiente estimación de estabilidad:

$$|u^1(t,x) - u^2(t,x)| \leq \text{máx}\left\{\|f^1 - f^2\|,\ \|\phi^1 - \phi^2\|,\ \|\psi^1 - \psi^2\|\right\},$$

donde $\|f\| = \max\limits_{x \in [0,L]} |f(x)|$ y $\|\phi\| = \max\limits_{t \in [0,T]} |\phi(t)|$.

10. Considera la solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ dada por

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} W(t, x-y)\, f(y)\, dy,$$

donde $W(t,x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-|x|^2/(4t)}$ es el núcleo de Gauss-Weierstrass. Demuestra que

(a) Si $f(y) = e^{iay}$ entonces $u(t,x) = e^{-a^2 t} e^{iax}$

(b) Si $f(y) = W(a,y)$ entonces $u(t,x) = W(a+t,x)$.

11. La *ecuación de los medios porosos* es una versión no-lineal de la ecuación del calor:

$$u_t = \Delta_x(u^a), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

donde $a > 1$ es una constante fija. En este ejercicio encontramos soluciones explícitas por el método de las autosemejanzas (ver Evans, 4.2.2), cuando $d = 1$. Es decir, buscamos $u(t,x) \geq 0$ tal que

$$u_t \;=\; \big(u^a\big)_{xx} \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx = 1,\ \forall\, t > 0. \tag{*}$$

(a) Demuestra que $v(t,x) = \gamma u(\lambda t, \mu x)$ cumple $(*)$ sii

$$\gamma = \mu \quad \text{y} \quad \lambda = \gamma^{a-1}\mu^2 = \mu^{a+1}.$$

(b) Sea $b = 1/(a+1)$. Encuentra una solución de $(*)$ de la forma

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{t^b}\,\phi\Big(\frac{x}{t^b}\Big),$$

para una función $\phi(r) \geq 0$ adecuada (digamos con $\phi(0) = 1$). Para ello

- demuestra que $\phi$ debe cumplir la EDO

$$\big(\phi^a\big)''(r) \;=\; -b\,\big(\phi(r) + r\phi'(r)\big) \;=\; -b\,\big(r\phi\big)'$$

- resolviendo la EDO anterior, deduce que

$$\phi(r) = \big(1 - (r/\gamma)^2\big)_+^{\frac{1}{a-1}}$$

para una constante $\gamma = \gamma(a) > 0$ a determinar.

(c) Demuestra que la solución obtenida en (b) cumple

$$\text{Sop } u(t,\cdot) = \big[-\gamma t^{\frac{1}{a+1}}, \gamma t^{\frac{1}{a+1}}\big],$$

y por tanto que $u(t,x)$ tiene velocidad de propagación finita.