Hoja 5: Convoluciones, núcleos de Dirichlet y Féjer

1. Si $f = \chi_{[0,a]}$, calcula la convolución $(f * f)(x)$ y dibuja su gráfica.

2. (i) Sean $K, f \in L^1$. Demuestra que si K es acotada, entonces $K * f(x)$ es continua en todo x (y también acotada).

   (ii) Encuentra ejemplos de $f, g \in L^1$ tales que $f * g$ no es continua, e incluso $f * g(x_0) = \infty$ en algún punto x_0.

   Nota: En (ii) intentar con $f(x) = g(x) = 1/|x|^\alpha$, $0 < |x| \le 1/2$, para una potencia α apropiada.

3. Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$. Demuestra que $\{K_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} K(x/\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ es una aproximación de la identidad, para toda sucesión $\varepsilon_n \searrow 0$.

4. Demuestra que $\sum_{n=1}^N \cos\big((2n-1)t\big) = \sin(2Nt)/[2\sin t]$.

5. (i) Si $|x| \le \pi/2$, demuestra que

$$\int_0^x \frac{\sin(Rt)}{\sin t}\,dt \;=\; \int_0^x \frac{\sin(Rt)}{t}\,dt \;+\; E_R(x),$$

   donde $|E_R(x)| \le C/R$, para todo $|x| \le \pi/2$ y para todo $R \ge 1$.

   (ii) Utiliza (i) para probar el siguiente lema de clase: si $|x| \le 1/2$

$$\int_0^x D_N(t)\,dt \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{(2N+1)\pi x} \frac{\sin t}{t}\,dt \;+\; \mathcal{O}(1/N), \qquad \text{si} \quad N \to \infty.$$

   (iii) Demuestra que existe $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t}\,dt$, calcula su valor a partir de (ii).

   Sugerencia: En (i) utiliza que $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ es de clase C^1, e integración por partes.

6. (i) Si $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)]$, demuestra que

$$\sigma_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \Big(1 - \frac{n}{N}\Big)\big[a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)\big].$$

   (ii) Deduce de (i) y del teorema de Féjer, que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y **real**, entonces se puede aproximar uniformemente por polinomios reales.

7. Utiliza Parseval para probar

   (i) $\|D_N\|_{L^2}^2 = 2N + 1$

   (ii) $\|F_N\|_{L^2}^2 \approx N$.

8. **Núcleos de de la Vallée-Poussin.** Definimos: $V_N = 2F_{2N} - F_N$, $N = 1, 2, \ldots$

   (i) Demuestra que $V_N = [D_N + \ldots + D_{2N-1}]/N$.

   (ii) Demuestra que $\{V_N\}_{N\ge1}$ es una aproximación de la identidad.

   (iii) Calcula los coeficientes de Fourier $\widehat{V_N}(n)$, y esboza su gráfica.

   (iv) ¿Son los núcleos $V_N(x) \ge 0$? Esboza la gráfica para algunos valores de N.

9. Si $|f(x)| \le M$ demuestra que $|\sigma_N f(x)| \le M$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Prueba también que, para alguna constante $c > 0$, se tiene $|S_N f(x)| \le c\,M\,\ln(N+1)$. ¿Se puede quitar el $\log(N+1)$ en esta desigualdad (o reemplazarlo por otra expresión menor)?

Opcionales:

10. Demuestra que $\quad L_N := \displaystyle\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|\,dx \;=\; \frac{4}{\pi^2}\,\ln(N+1) + O(1).$

Sugerencia: la cota inferior la vimos en clase; la cota superior sigue de las mismas ideas, usando además la estimación $\displaystyle\int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} |D_N(x)|\,dx = \int_{\frac{j}{2N+1}}^{\frac{j+1}{2N+1}} \frac{|\operatorname{sen}(2N+1)\pi x|}{\pi x}\,dx + O(1/N)$, que se prueba como en el Ejerc 5.i.

11. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $f \in Lip_\alpha(x_0)$, es decir $|f(x_0+h) - f(x_0)| \le c\,|h|^\alpha$, si $|h| \le \delta$, para algunas constantes $c, \delta > 0$ y para algún $\alpha \in (0,1)$. Demuestra que

$$\Big|\sigma_N f(x_0) - f(x_0)\Big| \;\le\; \frac{C}{N^\alpha}, \quad \text{si } N \gg 1.$$

¿Qué se puede probar si $\alpha = 1$?

Sugerencia: Acota la expresión anterior por $\int_{\mathbb{T}} |f(x_0+h) - f(x_0)|\,F_N(h)\,dh = \int_{|h|\le\frac{1}{N}} + \int_{\frac{1}{N}<|h|\le\delta} + \int_{\delta<|h|\le 1/2}$, y usa el decaimiento del núcleo de Féjer $|F_N(x)| \lesssim \text{mín}\{N, 1/(N|x|^2)\}$.

12. (i) Demuestra que los coeficientes de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T})$ se pueden escribir como

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \big[f(u) - f(u+\tfrac{1}{2k})\big]\, e^{-2\pi i k u}\,du, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Deduce que si $f \in Lip_\alpha(\mathbb{T})$, entonces

$$\hat{f}(k) = O(1/|k|^\alpha), \quad \text{para } |k| \to \infty.$$

(iii) Utiliza la función $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{2\pi i 2^k x}$, $\alpha \in (0,1)$, para probar que el decaimiento de (ii) no se puede mejorar a $o(1/|k|^\alpha)$.

Nota: En (iii) hay que justificar que $f \in C^\alpha$; para ello escribe $f(x+h) - f(x) = \sum_{2^k \le 1/|h|} + \sum_{2^k > 1/|h|}$, y utiliza la propiedad $|e^{i\theta} - 1| \le \text{mín}\{|\theta|, 2\}$.