Hoja 6: La ecuación de ondas en 2D

1. Considera el siguiente problema de la membrana vibrante radial

$$u_{tt} = c^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right], \quad u|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = 0, \quad u_t(0,r) = g(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

a) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, J_0(rs_n)\, \sin(c\, ts_n)$$

donde $0 < s_1 < s_2 < \dots$ son las raíces positivas de J_0.

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes a_n en función de $g(r)$.

c) Si $g(r) \equiv 1$, demuestra que $a_n = 2/[cs_n^2 J_1(s_n)]$.

d) Trata de dibujar con Maxima la solución (tomando $c = 1$ y digamos 5 términos en la suma).

Sugerencia: En c) puedes usar la fórmula de Sonine que enuncié en clase

$$\int_0^1 (1-r^2)^{\mu} J_{\nu}(\lambda r) r^{\nu+1}\, dr = 2^{\mu}\Gamma(\mu+1) J_{\nu+\mu+1}(\lambda)/\lambda^{\mu+1}, \quad \forall\, \nu, \mu > -1, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

2. *Vibración al golpear un tambor:* Suponer que en el ejercicio anterior tomamos

$$g(r) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2}, \quad \text{si } r \in (0,\varepsilon), \quad \text{y} \quad g(r) = 0 \quad \text{si } r \in [\varepsilon, 1).$$

a) Calcula los coeficientes a_n en este caso.

b) Demuestra que cuando $\varepsilon \to 0^+$, la solución se puede escribir como

$$u(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_n)\, \sin(c\, ts_n)}{\pi\, c\, s_n\, J_1(s_n)^2}$$

Sugerencia: En b) usa el primer término de la serie de potencias $J_n(r) = (r/2)^n/(n!) + O(r^{n+2})$, si $r \to 0^+$.

3. *Propagación del calor en el disco $\mathbb{D}$:* Si la temperatura inicial $f(r)$ sólo depende de r, y los extremos del disco están aislados, entonces $u(t,r)$ = temperatura en tiempo t a distancia r, debe cumplir la EDP

$$u_t = \kappa^2 \left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right], \quad u_r|_{r=1} = 0, \quad u(0,r) = f(r), \quad r \in (0,1),\ t > 0.$$

(i) Utiliza separación de variables para deducir la siguiente solución general

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-t\kappa^2\beta_n^2}\, J_0(r\beta_n)$$

donde $0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$ son las raíces no-negativas de $J_0'(z) = 0$.

(ii) Demuestra que $a_n = \dfrac{2}{J_0(\beta_n)^2} \displaystyle\int_0^1 f(r) J_0(\beta_n r)\, r dr$.

(iii) Demuestra que a_0 es el promedio de f en $\mathbb{D}$.

(iv) Si $f(r) = 1 - r^2$, encuentra una expresión exacta para a_n, y esboza la gráfica de $u(t,r)$ con Maxima.

Sugerencia: Puedes usar $J_0'(z) = -J_1(z)$, así como la fórmula $\int_0^1 [J_0(\beta r)]^2 r dr = J_0(\beta)^2/2$ si $J_0'(\beta) = 0$; ver los lemas de clase.

4. *Laplaciano en un cilindro de* $\mathbb{R}^3$. Considera un cilindro vertical de radio 1 y altura L

$$C = \big\{ r \in (0,1),\ \theta \in [0,2\pi],\ z \in (0,L) \big\}.$$

a) Utilizando separación de variables, encuentra la solución radial general $u(r,z)$ de la ecuación

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz} = 0, \qquad \text{en } C,$$

suponiendo que u se anula en la tapa inferior y en la cara lateral, y que viene dada por una función radial fija $f(r)$ en la tapa superior.

b) Encuentra una fórmula para los coeficientes en términos de f

c) Si $f(r) = J_0(s_3 r)$, donde $s_3 = 8'653...$ es el tercer cero positivo de J_0, esboza $f(r)$ y encuentra una fórmula explícita para $u(r,z)$

d) Encuentra la solución general $u(r,\theta,z)$ de $\Delta u = 0$ en C cuando el dato en la tapa superior es una función $f(r,\theta)$, no necesariamente radial.

Opcionales

5. *Ampliación del Ejercicio 4.* Encuentra la solución general $u(r,\theta,z)$ de $\Delta u = 0$ en C cuando $u = 0$ en las tapas superior e inferior, y en la cara lateral se tiene la condición de contorno $u(1,\theta,z) = h(\theta,z)$.

   Sugerencia: Al utilizar separación de variables, tendrás que resolver la EDO

$$r^2 u''(r) + r u'(r) - (r^2 + n^2) u(r) = 0,$$

   cuya solución general es $u(r) = A\, I_n(r) + B\, K_n(r)$, donde I_n y K_n se denominan *funciones de Bessel modificadas.* Sólo necesitarás usar que la función $I_n(r) := J_n(ir)/i^n > 0$ para todo $r > 0$, y que $K_n(0^+) = \infty$.

6. *Ampliación del Ejercicio 3.* Resuelve el ejercicio 3 sobre propagación radial del calor en $\mathbb{D}$, cuando la frontera del disco no está completamente aislada, pero se cumple

$$\partial_r u \, + \, \gamma \, u \, = \, 0, \quad \text{en } \partial\mathbb{D}.$$

   Sugerencia: puedes utilizar la fórmula $2\int_0^1 J_n(\lambda r)^2\, r\, dr = (1 - (n/\lambda)^2) J_n(\lambda)^2 + [J_n'(\lambda)]^2$ para normalizar la base de autofunciones correspondiente.