EDPs y Series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES — Examen mayo 2021

Nombre y DNI: ....

1. a) Demuestra la siguiente versión n-dimensional del principio del máximo para la ecuación del calor. *Sea* $\Omega = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ *un rectángulo abierto en* $\mathbb{R}^n$, *y sea* $Q = [0, T] \times \overline{\Omega}$. *Suponer que* $u(t, x) \in C^2(Q)$ *cumple* $[0,L]$

$$\overset{u_t}{\partial_t u} \leq \overset{u_{xx}}{\Delta_x u} \quad en\ Q.$$

Entonces

$$\max_{(t,x)\in Q} u(t,x) = \max_{(t,x)\in \partial_P Q} u(t,x),$$

donde $\partial_P Q = \partial Q \setminus \big[\{T\} \times \Omega\big]$.

b) Basándote en a), enuncia con precisión (y demuestra) un teorema de unicidad para las soluciones de la ecuación del calor no homogéneas $u_t = \Delta_x u + F(t,x)$ en el dominio Q.

Nota: 2'5 ptos

a) Sea $(t_0, x_0) \in Q$ donde $u(t_0,x_0) = \max_Q u$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\partial_t u < \Delta_x u$ en Q. Veamos que $(t_0,x_0) \in \partial_P Q = \partial Q \setminus [\{T\} \times \Omega]$

Suponemos que no y tenemos 2 opciones: ⓐ $(t_0, x_0) \in \mathring{Q}$ Buscamos la contradicción en ambas.

ⓑ $t_0 = T$, $x_0 \in \Omega \in \mathbb{R}^n$

ⓐ (t_0,x_0) es máximo local $\rightarrow \partial_t u(t_0,x_0) = 0$, $\nabla_x u(t_0,x_0) = 0$. Además $x \longmapsto u(t_0,x)$ tiene un máximo local en $x_0 \rightarrow \Delta_x u(t_0,x_0) \leq 0 \rightarrow \partial_t u(t_0,x_0) - \Delta_x(t_0,x_0) \geq 0$ #

✓

ⓑ $x \longmapsto u(t_0,x)$ tiene un máximo local en $x_0 \Rightarrow \nabla_x u(t_0,x_0) = 0$, $\Delta_x u(t_0,x_0) \leq 0$

Mirando $t \longmapsto u(t,x_0) \Rightarrow$ tiene un máximo global en T, e.d., $u(t,x_0) \leq u(T,x_0)$ $\forall t \in (0,T)$

$$\Rightarrow \partial_t u(T,x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(T-h, x_0) - u(T,x_0)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(T,x_0) - u(T-h,x_0)}{h} \geq 0 = \partial_t u(t_0,x_0)$$

✓

$\xrightarrow{EDP} \partial_t u(t_0,x_0) - \Delta_x u(t_0,x_0) \geq 0$ #

$\boxed{\text{CASO GENERAL}}$ $\partial_t u \leq \Delta_x u$ $\forall (t,x) \in Q$. Fijo $\varepsilon > 0$ y $V(t,x) = u(t,x) + \varepsilon \cdot |x|^2 \in C^2(Q)$.

Notar que $\partial_t V - \Delta_x V = \underbrace{\partial_t u - \Delta_x u}_{\leq 0} - \varepsilon \cdot 2n < 0 \xrightarrow{\text{caso 1}} \max_Q u \leq \max_Q V = \max_{\partial_P Q} [u(t,x) + \varepsilon \cdot x^2] \leq$

$\leq \max_{\partial_P Q} u + \varepsilon \cdot |y|^2 \Rightarrow$ si $\varepsilon \to 0$ $\max_Q u \leq \max_{\partial_P Q} u \leq \max_Q u \Rightarrow \max_Q u = \max_{\partial_P Q} u$ □

para algún $y \in \overline{\Omega}$

✓

b)

__Enunciado:__ Sean $F(t,x)$, $f(x)$ y $\phi(t)$ continuas en Q, entonces (P) $\begin{cases} u_t = \Delta_x u + F(t,x) & (t,x)\in Q \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,x)|_{\partial Q} = \phi(t) \end{cases}$ tiene a lo sumo 1 solución $u(t,x) \in C^2(Q)$.

__Demo:__ Supongamos por reducción al absurdo que existiese más de una solución. Sean $u_1(t,x), u_2(t,x) \in C^2(Q)$ dos soluciones de (P), y definimos $v(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x) \in C^2(Q)$, que cumple que:

$$v_t(t,x) = u^1_t(t,x) - u^2_t(t,x) = \Delta u^1(t,x) \cancel{+F(t,x)} - \Delta_x u^2(t,x) \cancel{-F(t,x)} = \Delta_x(u^1-u^2)(t,x) = \Delta_x v(t,x)$$

$$v(0,x) = u^1(0,x) - u^2(0,x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$v(t,x)\big|_{x\in\partial Q} = \phi(t) - \phi(t) = 0$$

Es decir, es solución del problema (P_2) $\begin{cases} v_t = \Delta_x v & (t,x)\in Q \\ v(0,x) = 0 \\ v(t,x)|_{\partial Q} = 0 \end{cases}$. Entonces, por el principio del máximo demostrado en a) aplicado a v y $-v$ se tiene que

$$0 = \min_{\partial_p Q} v(t,x) = \min_{Q} v(t,x) \leq v(t,x) \leq \max_{Q} v(t,x) = \max_{\partial Q} v(t,x) = 0$$

$\Rightarrow v(t,x) = 0$ en Q $\Rightarrow u_1(t,x) = u_2(t,x)$ en Q. //

2. Decimos que una función $f \in \mathcal{A}$ si se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}, \quad \text{para alguna sucesión tal que } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty.$$

Demuestra

a) si $f \in \mathcal{A}$ entonces $f \in C(\mathbb{T})$, y además $\widehat{f}(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

b) si $f, g \in \mathcal{A}$ entonces se cumple

$$\widehat{(fg)}(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n-m)\widehat{g}(m), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

c) si $h \in L^1(\mathbb{T})$ es tal que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{h}(n)| < \infty$, entonces $h \in \mathcal{A}$

d) Deduce de (b,c) que si $f, g \in \mathcal{A}$ entonces su producto $f \cdot g \in \mathcal{A}$

e) si $f \in C^1(\mathbb{T})$ entonces $f \in \mathcal{A}$

f) **V/F:** si $f \in \mathcal{A}$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$ (demuestra o da un contraejemplo).

Nota: 3 ptos

a) Por el M-test, $|\sum a_n e^{2\pi i n x}| \leq \sum |a_n| < \infty$

$\Rightarrow$ la serie converge UNIF + ABS y $f(x) := \sum a_n e^{2\pi i n x} \in C(\mathbb{T})$.

Además, por def

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i m x}\Big) e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$\overset{\text{conv unif}}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \underbrace{\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m x} \cdot e^{-2\pi i n x}\, dx}_{=0 \text{ si } m\neq n} = a_n.$$

b) De modo similar

$$\widehat{fg}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x) g(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx = \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i m x}\Big) \cdot g(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$\overset{\text{conv unif}}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \cdot \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m x} \cdot g(x)\, e^{-2\pi i n x}\, dx$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \cdot \hat{g}(n-m) \overset{a}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)\, \hat{g}(n-m)$$

$$\overset{n-m=\ell}{=} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n-\ell) \cdot \hat{g}(\ell).$$

ⓒ Si $h \in L^1(\mathbb{T})$ con $\sum |\hat{h}(n)| < \infty$, defino

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n) e^{2\pi i n x} \in A \xrightarrow[\text{por def}]{} (g \in A)$$

Por ⓐ, $\left.\begin{array}{l}\hat{f}(n) = \hat{h}(n) \\ \forall n \in \mathbb{Z}\end{array}\right\} \overset{\text{Tma Unic}}{\Longrightarrow} f = h \Rightarrow h \in A.$

ⓓ Si $f, g \in A \overset{ⓐ}{\Rightarrow} f\cdot g \in C(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$

Por ⓑ,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big| \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)\hat{g}(n-m)\Big|$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)|\,|\hat{g}(n-m)|$$

Fubini (series positivas) $= \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n-m)|\Big)$ $\quad n-m=\ell$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(\ell)| < \infty.$$

Entonces, por ⓒ, $f\cdot g \in A$.

ⓔ Vimos en clase $f \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow$ su SF converge ABS+UNIF

[e.g. $\displaystyle\sum_{n\neq 0} |\hat{f}(n)| = \sum \left|\frac{\widehat{f'}(n)}{2\pi i n}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\Big(\sum |\widehat{f'}(n)|^2\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\sum \frac{1}{n^2}\Big)^{\frac12}$

$\leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|_{L^2}\cdot \text{cte} < \infty$]

entonces, por ⓒ, $f \in A$.

ⓕ Es <u>FALSO</u>. Dado $\alpha > 0$, la función de Weierstrass

$$W_\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i 2^n x}}{2^{n\beta}} \in A \text{ (por def.)}$$

y si $\beta \in (0,\alpha)$, un Tma de clase nos dice que $W_\beta \notin Lip_\alpha(x_0)$ en ningún pto x_0.

3. **Test 3:** Considera la siguiente EDP

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2}, & t>0,\ r\in(0,1),\ \theta\in(0,2\pi) \\ u(0,r,\theta)=0, & r\in(0,1),\ \theta\in(0,2\pi) \\ \exists \lim\limits_{r\to 0_+} u \quad \text{y} \quad \partial_r u|_{r=1}=0, & \forall\, t>0,\ \theta\in(0,2\pi) \end{cases} \qquad (\star)$$

~~a~~) Si $u(t,r,\theta)=U(t,r)\cos(4\theta)$, utiliza separación de variables para deducir que

$$U(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\beta_n t)\, J_4(\beta_n r)$$

para ciertos parámetros β_n que debes determinar

~~b~~) Si añadimos la condición inicial $u_t(0,r,\theta)=f(r)\cos(4\theta)$, demuestra que

$$a_n=\frac{2\beta_n}{(\beta_n^2-16)J_4(\beta_n)^2}\int_0^1 f(r)J_4(\beta_n r)\, r\, dr$$

~~c~~) Encuentra el valor explícito de a_n cuando $f(r)=r^4-r^6$

~~d~~) ¿Cómo se modificaría la EDP $(\star)$ para que corresponda a una membrana circular, fija en los extremos, con velocidad inicial nula, posición inicial $h(r,\theta)$, y sujeta a la acción de la gravedad? (sólo enunciar la edp, no hay que resolverla)

Nota: 3 ptos

$(\cos(4\theta))_{\theta\theta}=(-4\operatorname{sen}(4\theta))_\theta=-16\cos(4\theta)$

a) $u(t,r,\theta)=\mathcal{U}(t,r)\cos(4\theta)$

$\mathcal{U}_{tt}\cos(4\theta)=\mathcal{U}_{rr}\cos(4\theta)+\frac{1}{r}\mathcal{U}_r\cos(4\theta)+\frac{1}{r^2}\mathcal{U}(-16\cos(4\theta))$ ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{U}_{tt}=\mathcal{U}_{rr}+\frac{1}{r}\mathcal{U}_r-\frac{16}{r^2}\mathcal{U} \\ \mathcal{U}(0,r)=0 \\ \exists \lim\limits_{r\to0^+}\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_r(t,1)=0 \end{cases}$$ ✓

Utilizamos separación de variables: $\mathcal{U}(t,r)=T(t)R(r)$

$T(0)R(r)=0 \Rightarrow T(0)=0$, $\exists R(0^+)$, $T(t)R'(1)=0\Rightarrow R'(1)=0$ ✓

$\Rightarrow T''(t)R(r)=T(t)R''(r)+\frac{1}{r}T(t)R'(r)-\frac{16}{r^2}T(t)R(r)$

$\xrightarrow{:T(t)R(r)} \frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{R''(r)}{R(r)}+\frac{1}{r}\cdot\frac{R'(r)}{R(r)}-\frac{16}{r^2}\equiv cte=\rho=-\lambda^2<0$ obteniendo las siguientes ecuaciones: ✓

① $\begin{cases} T''(t)=-\lambda^2T(t) \\ T(0)=0 \end{cases} \Rightarrow T(t)=A\cos(\lambda t)+B\operatorname{sen}(\lambda t)$

$T(0)=A=0 \Rightarrow T(t)=B\operatorname{sen}(\lambda t)$

② $\xrightarrow{\cdot r^2R(r)}$ $r^2R''(r)+rR'(r)-16R(r)=-\lambda^2r^2R(r)$ ← Ecuación de Bessel con $\nu=4$ ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+((\lambda r)^2-4^2)R(r) \\ R'(1)=0 \\ \exists R(0^+) \end{cases}$$

$\Rightarrow R(r)=AJ_4(\lambda r)+BY_4(\lambda r)$ pero como $Y_4(\lambda r)\underset{\lambda r\to0^+}{\longrightarrow}\infty$ no tiene sentido $\Rightarrow B=0$ ✓

$\Rightarrow R(r) = A J_4(\lambda r)$

y como $R'(1) = 0 \Rightarrow A\lambda J_4'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda \in Z_+(J_4') = \{\beta_1 < \beta_2 < \dots\}$

$\Rightarrow \mathcal{U}(t,r) = T(t)R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\beta_n t) J_4(\beta_n r)$ // donde los β_n son los ceros positivos de J_4'

b) $u_t(0,r,\theta) = f(r)\cos(4\theta)$

como $u(t,r,\theta) = \mathcal{U}(t,r)\cos(4\theta) \Rightarrow u_t(0,r,\theta) = \mathcal{U}_t(0,r)\cos(4\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n \cancel{\cos(\beta_n 0)}^{1} J_4(\beta_n r)\cos(4\theta)$

$\Rightarrow f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n J_4(\beta_n r)$

si hacemos $\int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n J_4(\beta_n r) J_4(\beta_m r) r\,dr = a_m \beta_m \|J_4(\beta_m r)\|_r^2$

$$\Rightarrow a_m = \frac{\int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr}{\beta_m \|J_4(\beta_m r)\|_r^2}$$

calculemos $\|J_4(\beta_m r)\|_r^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{16}{\beta_m^2}\right) J_4(\beta_m)^2 + \cancel{J_4'(\beta_m)}^{0\,2}\right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{\beta_m^2}\right) J_4(\beta_m)^2 = \frac{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}{2\beta_m^2}$

$$\Rightarrow a_m = \frac{\int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr}{\frac{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}{2\beta_m}} = \frac{2\beta_m}{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2} \int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr \quad //$$

c) Si $f(r) = r^4 - r^6 \Rightarrow a_m = \frac{2\beta_m}{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2} \underbrace{\int_0^1 (r^4 - r^6) J_4(\beta_m r) r\,dr}_{*}$

$(*)$ $\int_0^1 (1 - r^2) J_4(\beta_m r) r^5\,dr = \frac{2^1 \Gamma(2)}{\beta_m^2} J_6(\beta_m) \Rightarrow a_m = \frac{4\beta_m J_6(\beta_m)}{\beta_m^2 (\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}$

Sonine con $\mu = 1$, $\nu = 4$

$$\rightarrow a_m = \frac{4 J_6(\beta_m)}{\beta_m(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2} \quad //$$

4. Sea $\gamma > 0$ y sea $K_N(x)$ una familia de núcleos en $\mathbb{T}$ con las propiedades

$$\int_{\mathbb{T}} K_N(x)\,dx = 1, \quad \text{y} \quad |K_N(x)| \le c \,\text{mín}\{N, \frac{N}{(N|x|)^{1+\gamma}}\}$$

a) Demuestra que $K_N(x)$ es una aproximación de la identidad

b) Demuestra que si $\alpha \in (0,\gamma)$ y $f \in \operatorname{Lip}_\alpha(x_0)$, es decir existen $c,\delta > 0$ tales que $|f(x_0+h) - f(x_0)| \le c|h|^\alpha$, cuando $|h| \le \delta$, entonces

$$|K_N * f(x_0) - f(x_0)| \le C/N^\alpha$$

Nota: 1'5 ptos

Notar que $|K_N(x)| \le \begin{cases} c\cdot N, & \text{si } |x| \le 1/N \\ \dfrac{c\cdot N}{(N|x|)^{1+\gamma}} & \text{si } \frac{1}{N} \le |x| \le 1/2. \end{cases}$

(a)

$$\int_{\mathbb{T}} |K_N(x)|\,dx \le \int_{|x|\le \frac{1}{N}} c\cdot N\,dx + \int_{\frac{1}{N}\le|x|\le\frac{1}{2}} \frac{cN}{(N|x|)^{1+\gamma}}\,dx$$

par

$$= 2cN.\int_0^{\frac{1}{N}} dx + \frac{2cN}{N^{1+\gamma}}\int_{\frac{1}{N}}^{\frac{1}{2}} x^{-1-\gamma}\,dx$$

$$= 2c + \frac{2c}{N^\gamma}\cdot\left[\frac{x^{-\gamma}}{-\gamma}\right]_{x=1/N}^{x=1/2} = 2c + \frac{2c}{N^\gamma}\cdot\frac{(1/N)^{-\gamma} - (1/2)^{-\gamma}}{\gamma}$$

$$\le 2c + \frac{2c}{\cancel{N^\gamma}}\cdot\frac{\cancel{N^\gamma}}{\gamma} = 2c\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) = \text{cte}.$$

Si $\delta > 0$ es fijo, hay que ver que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\ge\delta} |K_N(x)|\,dx = 0$$

Si $N > 1/\delta$, entonces

$$\int_{\substack{|x|\ge\delta \\ x\in\mathbb{T}}} |K_N(x)|\,dx \le \int_{\substack{|x|\ge\delta \\ x\in\mathbb{T}}} \frac{cN}{(N|x|)^{1+\gamma}}\,dx \le \frac{cN}{(N\delta)^{1+\gamma}}\cdot\int_{\mathbb{T}} 1$$

$\delta > 1/N$; $|x| \ge \delta$

$$= \frac{c}{\delta^{1+\gamma}}\cdot\frac{1}{N^\gamma} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \Big\}.$$

(b) Se razona de forma similar, si $N > 1/\delta$

$$|K_N * f(x_0) - f(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{T}} K_N(y)\, f(x_0-y)\,dy - f(x_0)\int_{\mathbb{T}} K_N(y)\,dy \right|$$

$$\le \int_{\mathbb{T}} |K_N(y)|\cdot|f(x_0-y)-f(x_0)|\,dy$$

$$\le \int_{|x|\le \frac{1}{N}} CN\cdot \underbrace{|f(x_0-y)-f(x_0)|}_{\le C|y|^\alpha}\, dy + \int_{\frac{1}{N}\le|x|\le\delta} \frac{CN}{(N|y|)^{1+\gamma}}\cdot C|y|^\alpha\, dy$$

$$+ \int_{\delta\le|x|\le \frac{1}{2}} |K_N(y)|\, 2\|f\|_\infty\,dy = I + II + III.$$

$(\gamma>\alpha)$

(III) · Ya hemos visto que $III \le 2\|f\|_\infty \cdot \frac{c}{\delta^{1+\gamma}}\cdot\frac{1}{N^\gamma} \le c''\cdot\frac{1}{N^\alpha}$

(I) · $$I = 2c^2N\int_0^{\frac{1}{N}}|y|^\alpha\, dy = c'N\left[\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^{\frac{1}{N}} = c''\cdot\frac{1}{N^\alpha}$$

(II) · $$II = \frac{2c^2\cdot N}{N^{1+\gamma}}\int_{\frac{1}{N}}^{\delta}|y|^{\alpha-1-\gamma}\,dy = \frac{c'}{N^\gamma}\left[\frac{y^{\alpha-\gamma}}{\alpha-\gamma}\right]_{\frac{1}{N}}^{\delta}$$

$$= \frac{c'}{N^\gamma}\,\frac{(1/N)^{\alpha-\gamma}-\delta^{\alpha-\gamma}}{\gamma-\alpha} \le \frac{c''}{N^\gamma}\cdot\frac{1}{N^{\alpha-\gamma}} = \frac{c''}{N^\alpha}.$$

$(\gamma>\alpha)$

Juntando los 3 casos

$$|K_N*f(x_0)-f(x_0)| \le I+II+III \le \frac{c'''}{N^\alpha}.$$