EDPs y series de Fourier, 3º Matemáticas/4º PES   Test 1, 9/3/2021

Nombre:

.... 10

1. Considera la EDP

$$\begin{cases} u_t = \alpha(t)\, u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < L \\ u(t,0) = 100,\ u_x(t,L) = 0, & t > 0, \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

donde $\alpha(t) = 1/(1+t)$.

a) Da una breve interpretación física de (P). ¿Qué debería ser $\lim_{t\to\infty} u(t,x)$?

b) Demuestra que u es solución de (P) si y sólo si $u = 100 + v$, donde v es solución de una EDP similar con condiciones de contorno homogeneas (que debes determinar).

c) Encuentra una solución general para la ecuación (P) (justifica matemáticamente todos los casos).

d) Suponiendo $L = \pi/2$, resuelve explícitamente el caso $f(x) = 100 + 10\,\mathrm{sen}(3x)$, e intenta esbozar la gráfica de la solución.

Nota: En c) no es necesario calcular una fórmula para los coeficientes.

a)

El problema se corresponde con una varilla de longitud L a la cual se le aplica calor. Dicha varilla presenta uno de sus extremos $(x=0)$ a temperatura constante 100 mientras que el otro está aislado. ✓

En este problema, $\alpha(t)$ que representa la difusividad termica varía con el tiempo (decrece conforme t aumenta). ✓

Como en el problema un extremo está a temperatura constante y por el otro el calor no puede escapar, lo esperable sería $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 100$. Es decir, que la temperatura acabe ✓ siendo constante en toda la varilla y con valor 100.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos u solución de (P). Sea $v = u - 100$, se cumple

$$\begin{cases} v_t = u_t \\ v_{xx} = u_{xx} \\ v_x = u_x \end{cases}$$

Utilizando que u es solución $\quad v_t = u_t = \alpha(t)\, u_{xx} = \alpha(t)\, v_{xx}$

se tiene que v cumple la ecuación. y también se cumple: ✓

$$\begin{cases} v(t,0) = u(t,0) - 100 = 0 \\ v_x(t,L) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$ (condiciones de contorno homogéneas).

$\Leftarrow$ Análogamente, si se verifica $\begin{cases} V_t = \alpha(t) V_{xx} \\ V(t,0)=0 \ , \ V_x(t,L)=0 \end{cases}$ con v solución,

como $V_t = U_t$ y $V_{xx} = U_{xx}$ la función $U(t,x)$ satisface la ecuación del calor y para estudiar las condiciones de contorno como se tiene que $u(t,x) = 100 + v(t,x)$, entonces $u(t,0) = 100 - 0 = 100$ y $u_x(t,0) = v_x(t,0) = 0$.
Por tanto, u es solución de (P).

c) Búsqueda de una solución general.

Utilizando el apartado b), podemos centrar los esfuerzos en resolver el problema $\begin{cases} V_t = \alpha(t) V_{xx} \\ V(t,0) = 0 \ , \ V_x(t,L) = 0. \end{cases}$

Para ello, empleando la técnica de separación de variables buscaremos un candidato a solución de la forma $u(t,x) = T(t)\, X(x)$.

Derivando la expresión e imponiendo que se verifique la ecuación del calor

$V_t = T'(t) X(x)$, $V_{xx} = T(t) X''(x)$. , $T'(t) X(x) = \alpha(t) T(t) X''(x)$.

Dividiendo por $T(t) X(x)$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha(t) \frac{X''(x)}{X(x)}$$. Como $\alpha(t) = \frac{1}{1+t}$, puedo reescribir la ecuación

como $$\frac{T'(t)}{T(t)} (1+t) = \frac{X''(x)}{X(x)} = \rho \text{ cte.}$$ Lo que posibilita extraer

$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{1}{1+t} \cdot \rho & (1) \\ X''(x) = \rho \, X(x) & (2) \end{cases}$$

(1) Integrando esta ecuación se tiene

$$\log(T(t)) = \rho \cdot \log(1+t) + K \Rightarrow T(t) = C \cdot (1+t)^{\rho}$$

(2) Utilizando las condiciones de contorno

$u(t,0) = 0 \rightarrow T(0) X(0) = 0 \rightarrow X(0) = 0.$

$V_x(t,L) = 0 \rightarrow T(L) X'(L) = 0 \rightarrow X'(L) = 0.$

Para la resolución de $X''(x) = p\,X(x)$ distinguiremos algunos casos

1) $p = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} X'(x) = K_1 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow X'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(x) = K_2 \\ X(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0.$

Se descarta este caso porque nos interesan soluciones no nulas. ✓

2) $p > 0$ Por comodidad escribiré $p = \lambda^2$ con lo que se tiene

$X(x) = A\cosh(\lambda x) + B\,\mathrm{senh}(\lambda x)$, imponiendo las condiciones de contorno

$X(0) = A\cosh(\lambda \cdot 0) = 0$. Como $\cosh(x)$ no se anula $\Rightarrow A = 0$.

Por otro lado,

$X'(x) = \lambda B\cosh(\lambda x)$

$X'(L) = \lambda \cdot \cosh(\lambda \cdot L) \cdot B = 0$ Como $p = \lambda^2 > 0$ y por el mismo argumento ✓

de antes se debe cumplir $B = 0$.

Por tanto la solución es nula y habría que descartarla.

3) $p < 0$. Sea $p = -\lambda^2$. La solución presenta la forma

$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\,\mathrm{sen}(\lambda x)$. Imponiendo las condiciones de contorno

$X(0) = A\cos(\lambda \cdot 0) = 0 \Rightarrow A = 0$.

$X'(x) = B\cos(\lambda x)$

$X'(L) = B \cdot \cos(\lambda \cdot L) = 0$ Como buscamos soluciones no nulas $B \neq 0$

y $\cos(\lambda L) = 0 \Leftrightarrow \lambda L = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ✓

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ✓

De este modo:

$X_n(x) = \tilde{B}_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{L}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como $p = -\lambda^2$, entonces $p = -\frac{1}{L^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\pi^2$. y se tendrá y por tanto

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1+t)^{-\frac{1}{L^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{1}{L}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$ ✓

$u(t,x) = v(t,x) + 100.$

d)

Sea $L = \frac{\pi}{2}$. Imponiendo que $u(0,x) = f(x) = 100 + 10 \operatorname{sen}(3x)$

$$u(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\pi}\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + 100 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(2\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + 100$$

Tomando $B_1 = 10$ y el resto de $B_n = 0$ se cumple ✓

$$u(0,x) = 10 \cdot \operatorname{sen}\left(2\left(\frac{3}{2}\right)x\right) + 100 = 10 \cdot \operatorname{sen}(3x) + 100$$

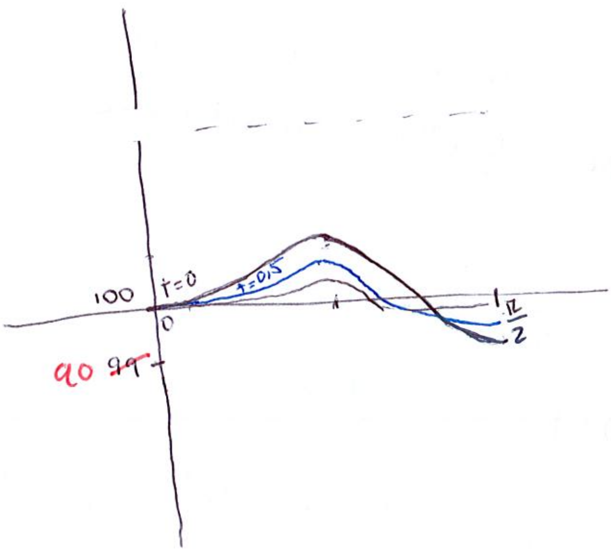
Por tanto, la solución será:

$$u(t,x) = 100 + (1+t)^{-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\pi^2} \cdot 4} \cdot 10 \cdot \operatorname{sen}(3x)$$

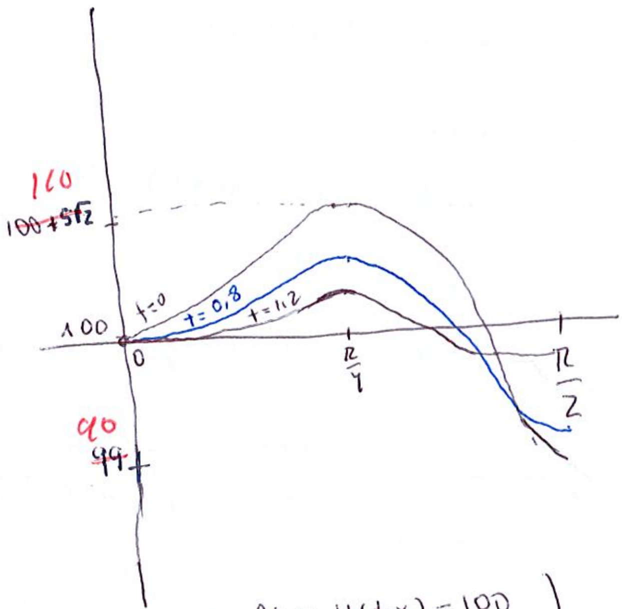
$$= \underline{100 + 10 \cdot (1+t)^{-9} \cdot \operatorname{sen}(3x)}$$ ✓

Todo bien

Solución gráfica:



(Más ampliado)



(Las observaciones gráficas confirman la idea de $\lim_{t \to \infty} u(t,x) = 100$).