3. **Test 3:** Considera la siguiente EDP

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_{\theta\theta}}{r^2}, & t > 0,\ r \in (0,1),\ \theta \in (0, 2\pi) \\ u(0, r, \theta) = 0, & r \in (0,1),\ \theta \in (0, 2\pi) \\ \exists \lim\limits_{r\to 0_+} u \quad \text{y} \quad \partial_r u|_{r=1} = 0, & \forall\, t > 0,\ \theta \in (0, 2\pi) \end{cases} \qquad (\star)$$

a) Si $u(t, r, \theta) = U(t, r)\cos(4\theta)$, utiliza separación de variables para deducir que

$$U(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\beta_n t)\, J_4(\beta_n r)$$

para ciertos parámetros β_n que debes determinar

b) Si añadimos la condición inicial $u_t(0, r, \theta) = f(r)\cos(4\theta)$, demuestra que

$$a_n = \frac{2\beta_n}{(\beta_n^2 - 16) J_4(\beta_n)^2} \int_0^1 f(r) J_4(\beta_n r)\, r\, dr$$

c) Encuentra el valor explícito de a_n cuando $f(r) = r^4 - r^6$

d) ¿Cómo se modificaría la EDP $(\star)$ para que corresponda a una membrana circular, fija en los extremos, con velocidad inicial nula, posición inicial $h(r, \theta)$, y sujeta a la acción de la gravedad? (sólo enunciar la edp, no hay que resolverla)

Nota: 3 ptos

$(\cos(4\theta))_{\theta\theta} = (-4\operatorname{sen}(4\theta))_\theta = -16\cos(4\theta)$

a) $u(t,r,\theta) = \mathcal{U}(t,r)\cos(4\theta)$

$\mathcal{U}_{tt}\cos(4\theta) = \mathcal{U}_{rr}\cos(4\theta) + \frac{1}{r}\mathcal{U}_r\cos(4\theta) + \frac{1}{r^2}\mathcal{U}(-16\cos(4\theta))$ ✓

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{U}_{tt} = \mathcal{U}_{rr} + \frac{1}{r}\mathcal{U}_r - \frac{16}{r^2}\mathcal{U} \\ \mathcal{U}(0,r) = 0 \\ \exists \lim\limits_{r\to 0^+} \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_r(t,1) = 0 \end{cases}$$ ✓

Utilizamos separación de variables: $\mathcal{U}(t,r) = T(t)R(r)$

$T(0)R(r) = 0 \Rightarrow T(0) = 0$, $\exists R(0^+)$, $T(t)R'(1) = 0 \Rightarrow R'(1) = 0$ ✓

$\Rightarrow T''(t)R(r) = T(t)R''(r) + \frac{1}{r}T(t)R'(r) - \frac{16}{r^2}T(t)R(r)$

$\xrightarrow{:T(t)R(r)} \dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{R''(r)}{R(r)} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{R'(r)}{R(r)} - \dfrac{16}{r^2} \equiv cte = \rho = -\lambda^2 < 0$ obteniendo las siguientes ecuaciones: ✓

① $\begin{cases} T''(t) = -\lambda^2 T(t) \\ T(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow T(t) = A\cos(\lambda t) + B\operatorname{sen}(\lambda t)$

$T(0) = A = 0 \Rightarrow T(t) = B\operatorname{sen}(\lambda t)$

② $\xrightarrow{\cdot r^2 R(r)}$ $r^2R''(r) + rR'(r) - 16R(r) = -\lambda^2 r^2 R(r)$

$\Rightarrow \begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + ((\lambda r)^2 - 4^2)R(r) \\ R'(1) = 0 \\ \exists R(0^+) \end{cases}$ ← Ecuación de Bessel con $\nu = 4$ ✓

$\Rightarrow R(r) = AJ_4(\lambda r) + BY_4(\lambda r)$ pero como $Y_4(\lambda r) \underset{\lambda r\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$ no tiene sentido $\Rightarrow B = 0$ ✓

$\Rightarrow R(r) = A J_4(\lambda r)$

y como $R'(1) = 0 \Rightarrow A\lambda J_4'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda \in Z_+(J_4') = \{\beta_1 < \beta_2 < \dots\}$

$\Rightarrow \mathcal{U}(t,r) = T(t)R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\beta_n t) J_4(\beta_n r)$ // donde los β_n son los ceros positivos de J_4' ✓

V

b) $u_t(0,r,\theta) = f(r)\cos(4\theta)$

como $u(t,r,\theta) = \mathcal{U}(t,r)\cos(4\theta) \Rightarrow u_t(0,r,\theta) = \mathcal{U}_t(0,r)\cos(4\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n \cancel{\cos(\beta_n 0)}^{1} J_4(\beta_n r)\cos(4\theta)$

$\Rightarrow f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n J_4(\beta_n r)$ ✓

si hacemos $\int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n J_4(\beta_n r) J_4(\beta_m r) r\,dr = a_m\beta_m \| J_4(\beta_m r)\|_r^2$ ✓

$\Rightarrow a_m = \dfrac{\int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr}{\beta_m \| J_4(\beta_m r)\|_r^2}$ ✓

calculemos $\| J_4(\beta_m r)\|_r^2 = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{16}{\beta_m^2}\right) J_4(\beta_m)^2 + \cancel{J_4'(\beta_m)}^{0\,2}\right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{\beta_m^2}\right) J_4(\beta_m)^2 = \dfrac{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}{2\beta_m^2}$ ✓

$\Rightarrow a_m = \dfrac{\int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr}{\frac{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}{2\beta_m}} = \dfrac{2\beta_m}{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2} \int_0^1 f(r) J_4(\beta_m r) r\,dr$ // ✓

c) Si $f(r) = r^4 - r^6 \Rightarrow a_m = \dfrac{2\beta_m}{(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2} \underbrace{\int_0^1 (r^4 - r^6) J_4(\beta_m r) r\,dr}_{(*)}$

(*) $\int_0^1 (1 - r^2) J_4(\beta_m r) r^5\,dr = \dfrac{2^1\Gamma(2)}{\beta_m^2} J_6(\beta_m) \Rightarrow a_m = \dfrac{4\beta_m J_6(\beta_m)}{\beta_m^2(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}$ ✓

Sonine con $\mu = 1$, $\nu = 4$

$\rightarrow a_m = \dfrac{4 J_6(\beta_m)}{\beta_m(\beta_m^2 - 16) J_4(\beta_m)^2}$ ✓ //