Funciones de Variable Compleja *Curso 2015/16*

Hoja 4: Integración curvilínea y fórmula de Cauchy en el disco

1. Calcula la integral de línea de $f(z) = (z+2)/z$ sobre los siguientes arcos de circunferencia

$$(a)\ \gamma = \{|z| = 2\} \qquad (b)\ \gamma^+ = \{|z| = 2\} \cap \{\Im m\, z \geq 0\} \qquad (c)\ \gamma^- = \{|z| = 2\} \cap \{\Im m\, z \leq 0\}$$

2. Calcula $\int_\gamma \exp(\pi \bar{z})\, dz$ cuando γ es la frontera del cuadrado de vértices $[0,\ 1,\ 1+i,\ i]$.

3. Calcula la integral de línea $\int_\gamma \left(x^2 - iy^2\right) dz$ cuando

   a) γ es el arco de la parábola $y = 2x^2$ que une $P_0 = 1+2i$ con $P_1 = 2+8i$

   b) γ es el segmento que une P_0 con P_1

   ¿Es razonable que las integrales no coincidan?

4. Utiliza primitivas para calcular las integrales

$$(a) \int_i^{1/2} e^{\pi z}\, dz \qquad (b) \int_0^{\pi+i} \cos(z/2)\, dz \qquad (c) \int_{|z|=4} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

5. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco C^1 a trozos y $f \in C(\gamma^*)$. Demuestra las siguientes propiedades

   (i) $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$, para toda reparametrización $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ con $\varphi : [a_1, b_1] \to [a,b]$ difeomorfismo creciente. ¿Qué ocurre si φ es decreciente? ¿Y si consideramos $\int_{\gamma_1} f(z)|dz|$?

   (ii) $\int_{F\circ\gamma} f(z)dz = \int_\gamma f \circ F(w)\, F'(w)\, dw$ para toda F holomorfa en un entorno de γ^*

   (iii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma|_{[a,b_n]}} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$ para toda sucesión $b_n \nearrow b$

6. * En clase probamos que $I(a) := \int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ cuando $a \in \mathbb{D}$.

   a) Demuestra que $I(a) = 0$ cuando $|a| > 1$.

   b) Calcula $I(a; z_0, R) := \int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-a}$, cuando $a \in D_r(z_0)$ y cuando $a \notin \overline{D_r(z_0)}$

   Sugerencia: en (b), escribe $I(a; z_0, R)$ en términos de $I(\tilde{a})$ con un cambio de variables adecuado.

7. Utiliza la fórmula integral de Cauchy para evaluar las siguientes integrales

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\, dz \qquad (b) \int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^4}\, dz \qquad (c) \int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{Log}(z+1)}{\sqrt{z}(z-1)(z+2)}\, dz$$

8. Demuestra que si $a > 1$ entonces $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$.

   Sugerencia: usando $z = e^{it}$, transforma la integral en $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ para una $f(z)$ adecuada, y después utiliza la fórmula integral de Cauchy.

9. Demuestra que, si $P(z)$ es un polinomio de grado n entonces $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = 2\pi i n$.

   Sugerencia: usar el ejercicio 10 de la hoja 2.

10. * a) Demuestra que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-(t+ib)^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ para todo $b \in \mathbb{R}$.

    b) Demuestra que a) sigue siendo cierto reemplazando ib por un complejo $a+ib$ arbitrario.

    c) Utiliza lo anterior para demostrar que si $f(t) = e^{-\pi t^2}$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i t x}\, dt = f(x)$.

    Sugerencia: En (a), utiliza $\int_{\gamma_N} e^{-z^2} dz = 0$ si γ_N es el rectángulo con vértices $\pm N, \pm N + ib$, y haz $N \to \infty$.

Ejercicios adicionales:

11. Más integrales del tipo del Teorema de Cauchy

$$(a)\ \int_{|z|=\pi} \frac{\sin \pi z}{z-1}\, dz \qquad (b)\ \int_{|z|=\pi} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^4}\, dz \qquad (c)\ \int_{|z|=1/\pi} \frac{\sin \pi z}{(z-1)^{39}}\, dz$$

$$(d)\ \int_{|z-2|=2} \frac{z-5}{z^2+2z-3}\, dz \qquad (e)\ \int_{|z+i|=3} \frac{ze^{\pi z}}{z^2+1}\, dz \qquad (f)\ \int_{|z-1|=2} \Big(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2-i}\Big) dz$$

$$(g)\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\cos t} \qquad (h)\ \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(t+\operatorname{sen} t)\, dt \qquad (i)\ \int_{|z-1-i|=2} \frac{S(z)}{(z-1)^3}\, dz$$

donde en (i) suponemos $S(z) = \int_0^z \operatorname{Log}(w+1)\, dw$

Soluciones: si no me he equivocado (a,c,f,h)=0, (b)=$i\pi^4/3$, (d,e)=$-2\pi i$, (g)=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, (i)=$\pi i/2$.

12. Demostración alternativa del ejercicio 6: sea $F(z) = \int_{C_{z_0,r}} \frac{d\xi}{\xi - z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus C_{z_0,r}$

(i) demuestra que $F(z)$ cumple las hipótesis del lema de integración paramétrica que vimos en clase, y calcula $F'(z)$

(ii) demuestra que el integrando que aparece en $F'(z)$ tiene primitiva holomorfa, y concluye que F debe ser cte en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C_{z_0,r}$.

(iii) demuestra que $F(z) \equiv 2\pi i$ en $D_r(z_0)$, calculando $F(z_0)$ mediante parametrización de la curva

(iv) demuestra que $F(z) \equiv 0$ en $\mathbb{C} \setminus \bar{D}_r(z_0)$, calculando $\lim_{z\to\infty} F(z)$

13. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, demuestra que

(i) $f'(0) = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)-f(-z)}{z^2}\, dz$

(ii) el conjunto $f(\mathbb{D})$ debe tener un diámetro mayor o igual que $2|f'(0)|$.

14. Utiliza el teorema de Liouville para probar

(i) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\Re e\,[f(z)] > 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $f \equiv cte$

(ii) Si $u \in \mathcal{H}ar(\mathbb{C})$ y está acotada inferiormente, entonces $u \equiv cte$

(iii) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $|f'(z)| \leq M(1+|z|^{\frac{1}{2}})$ entonces f es un polinomio de grado 1

(iv) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y doblemente periódica (digamos $f(z+1) = f(z)$ y $f(z+i) = f(z)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$), entonces $f \equiv cte$

(v) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$

Sugerencia: En (ii) puede ser útil construir una función holomorfa del tipo e^{-u-iv}.
En (v), si no fuera denso se podría encontrar z_0 tal que $1/[f(z)-z_0]$ sea entera y acotada.