Variable Compleja, 3º Matemáticas/4º PES **Examen final, 25/1/2016**

Nombre y DNI:

. . . .

1. Demuestra el Teorema Fundamental del Álgebra a partir del teorema de Liouville. Enuncia adecuadamente los resultados que utilices.

   Nota: 1'5 ptos

2. Considere los abiertos $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $\Omega_1 = \{z : \Re z \neq 0\} \cup i(-1, 1)$, y sea

$$f(z) = \frac{1 - z^2 + 2iz}{1 + z^2}, \quad z \in \Omega_0.$$

   a) Clasifique las singularidades de $f(z)$ y calcule el residuo en cada una de ellas.

   b) Demuestre que $f(z)$ posee un logaritmo holomorfo $g(z)$ en Ω_1 pero no en Ω_0.

   c) Encuentre el desarrollo en serie de potencias de $g(z)$ centrado en 0 y diga su radio de convergencia.

   Nota: 2'5 ptos

3. Considera la función $f(z) = \dfrac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}$, y la curva $C_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

   a) Demuestra que $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$

   b) Demuestra que $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{C_\epsilon} f(z)\, dz = 0$

   c) Demuestra que si $t > 0$ entonces $f(-t) = f(t)e^{i\pi/3}$.

   d) Demuestra que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Nota: 2'5 ptos

4. a) Dibuja (justificadamente) los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$

$$A_1 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > |2z - 3i| \Big\}, \quad A_2 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re e \left[\frac{z-1}{1-i}\right] < 0 \Big\}.$$

   b) Encuentra una transformación de Möbius T que envíe $(i, 1+2i, 3i)$ en $(1, i, \infty)$.

   c) Calcula (justificadamente) el valor de $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{Tz}{z-i}\, dz$.

   Nota: 2'5 ptos

5. **V ó F:** justifica o da un contraejemplo

   a) Si $z = a + ib$ con $a < 0$ y $b > 0$ entonces $_{\mathrm{P}}\sqrt{z^2} = -z$

   b) Las series $\sum \frac{z^n}{2^n}$ y $\sum \frac{z^{2^n}}{2^n}$ tienen el mismo radio de convergencia

   c) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f \not\equiv 0$ y $f(z_n) = 0$ para una sucesión de puntos distintos $z_1, z_2, \ldots$ entonces existe $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

   d) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ entonces $\Re e\, f$ alcanza el máximo en un punto $z \in \partial\mathbb{D}$

   Nota: 1 pto

[redacted]

1'5

① Enunciado del Teorema de Liouville.

si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y acotada entonces f es constante.

Enunciado del Teorema fundamental del Álgebra.

Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polinomio en $\mathbb{C}$ de grado$(P) = n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P tiene exactamente n raíces distintas en $\mathbb{C}$.

Dem:

Supongamos $P(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y definimos $f(z) = \dfrac{1}{P(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$\text{Sabemos} \left.\begin{array}{l} P(z) \xrightarrow{\text{,, grado}(P)\geq 1} \infty \\ z \longrightarrow \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(z) \longrightarrow 0 \\ z \longmapsto \infty \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ está acotada en todo } \mathbb{C} \Rightarrow$$

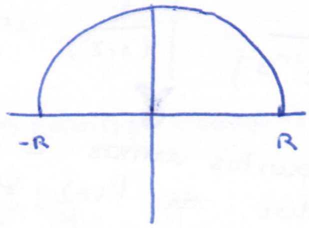
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema Liouville}}}{\Rightarrow f \equiv cte} \Rightarrow P \equiv cte \ \underset{\substack{\#(\text{grado}(P) = n \geq 1) \\ \text{no cte}}}{\Big\}} \Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C} \mid P(z_1) = 0$$

Definimos $Q(z) = \dfrac{P(z)}{z - z_1}$ = polinomio de grado $n-1$

$\Rightarrow$ Repetimos el mismo argumento para Q y obtenemos $n-1$ raíces distintas para $Q(z)$ ∎

[redacted]

$f(z) = \frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}$ curva $C_R(\theta) = Re^{i\theta}$ $\theta \in [0,\pi]$



a) Demuestra que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

$\int_{C_R} \frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}\,dz$ no veamos una acotación

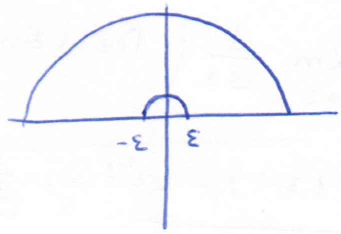
$$\int_{C_R} \left|\frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}\right| |dz| \le \frac{R^{1/3}}{(R^2-1)^2} \cdot \pi R = \frac{R^{4/3}}{(R^2-1)^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } R\to\infty$$

Pues

$$\frac{|z^{1/3}|}{|(1+z^2)^2|} \le \frac{\cancel{R^{1/3}}\, R^{1/3}}{(R^2-1)^2}$$

Cuando $R\to\infty$

Y por eso la integral tiende a 0.



b) Demuestra que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$

De igual forma que en el anterior

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}\,dz \rightsquigarrow \int_{C_\varepsilon} \left|\frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}\right| |dz| < \frac{|\varepsilon^{1/3}|\cdot \varepsilon}{\underbrace{|(1-\varepsilon^2)^2|}_{\to 1}} \overset{\to 0}{\pi} \longrightarrow 0$$

1

$$\frac{|z^{1/3}|}{|(1+z^2)^2|} \le \frac{|\varepsilon^{1/3}|}{|(1-\varepsilon^2)^2|}$$

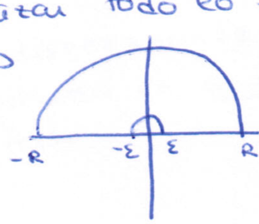
c) Demuestra que si $t>0$ entonces $f(-t) = f(t)e^{i\pi/3}$

$$f(-t) = \frac{(-t)^{1/3}}{(1+\underbrace{(-t)^2}_{t^2})^2} = \frac{(\overset{-1}{e^{i\pi}}\cdot t)^{1/3}}{(1+t^2)^2} = \frac{e^{i\pi/3}\, t^{1/3}}{(1+t^2)^2} = f(t)\cdot e^{i\pi/3}$$

¿no explica?

0'5

d) $\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ Para ello vamos a utilizar todo lo ya calculado en los apartados anteriores



~~ti~~ Calculando la integral $\int_\gamma \frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2}\,dz$ sobre

$$\int_\gamma \frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2} = \cancel{\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz}^{\,0} + \cancel{\int_{C_R} f(z)\,dz}^{\,0} + \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(z)\,dz$$ por el apartado c

$$= e^{i\pi/3}\int_\varepsilon^R f(z)\,dz + \int_\varepsilon^R f(z)\,dz = (1+e^{i\pi/3})\int_0^\infty f(z)\,dz$$

$R\to\infty$

$\varepsilon\to 0$

Por lo que nos va a quedar que

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{(1+e^{i\pi/3})}\cdot \int_\gamma \frac{z^{1/3}}{(1+z^2)^2} = \left(\frac{2\pi i}{(1+e^{i\pi/3})}\right)\cdot \mathrm{Res}(f,\ )$$

Veamos en que puntos vamos a calcular el residuo. El denominador de $f(z)$ se anula en $\pm i$ que serán polos dobles pero solo se encuentra en C_R $\{i\}$. Calculemos el residuo.

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(f(z)\cdot(z-i)\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{1/3}(\cancel{z-i})^2}{(\cancel{z-i})^2(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i} \cancel{\frac{1}{3}z^{-2/3}(z-i)(z+i)^2}$$

$$= \lim_{z\to i}\cancel{\frac{\frac{1}{3}z^{-2/3}(z-i)(z+i)^2 - z^{1/3}\left((z+i)^2+2(z-i)(z+i)\right)}{(z-i)^2(z+i)^4}}$$ MAL

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(f(z)(z-i)^2\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{1/3}}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{\frac{1}{3}z^{-2/3}(z+i)^2 - 2}{(z+i)^4}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{\frac{1}{3}z^{-2/3}(z+i) - 2z^{1/3}}{(z+i)^3} = \frac{\frac{1}{3}i^{-2/3}\cdot 2i - 2i^{1/3}}{(2i)^3} = \frac{\frac{2}{3}i^{1/3} - 2i^{1/3}}{(2i)^3} = \frac{-4\,i^{1/3}}{3\cdot 8\,i^3}$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 2\, i^{8/3}}$$

Por lo que nos queda

$$I = -\frac{\pi}{3(1+e^{i\pi/3})\,i^{5/3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$1+e^{i\pi/3} = 1+\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$i^{5/3} = e^{\frac{5}{3}\ln i} = e^{\frac{5}{3}\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} + \cancel{\frac{3}{4}i} - \cancel{\frac{3}{4}i} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{4\sqrt{3}}{4}$$

[redacted] [redacted]

4 b

2'5

Podemos formar T como composición de otras dos transformaciones.

$T_1 : (i, 1+2i, 3i) \longrightarrow (0, 1, \infty)$

$T_2 : (0, 1, \infty) \longrightarrow (1, i, \infty)$

De modo que $T = T_2 \circ T_1$

Calculemos T_1. (usando la fórmula $T = \frac{z-z_1}{z-z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$)

$$T_1 = \frac{z-i}{z-3i} \frac{(1+2i)-3i}{(1+2i)-i} = \frac{z-i}{z-3i} \frac{1-i}{1+i} \quad \checkmark$$

Como T_2 lleva ∞ a ∞ es fácil de calcular pues tendrá la forma $T_2 = az + b$

$T_2(0) = 1 \Rightarrow b = 1 \qquad T_2 = az + 1$

$T_2(1) = i \Rightarrow a + 1 = i \qquad a = i - 1$

$T_2(z) = (i-1)z + 1 \quad \checkmark$

Entonces T será:

$$T(z) = T_2 \circ T_1 = (i-1)\frac{z-i}{z-3i}\frac{1-i}{1+i} + 1$$

$$\boxed{T(z) = \frac{z-i}{z-3i}\frac{1-i}{1+i}(i-1) + 1}$$

opera

$$\boxed{= \frac{(2+i)z + 1-4i}{z-3i}}$$

4 c

El denominador se anula en $z = i$, que está dentro del disco $D(0,2)$. Por otra parte T es holomorfa en $D(0,2.5)$ puesto que su denominador sólo se anula en $z = 3i$.

Esto nos permite usar en estas condiciones la fórmula de Cauchy:

$$f(p) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)}\,dz \quad \frac{1}{2\pi i}$$

En este caso:

$$\int_{|z|=2} \frac{Tz}{z-i}\,dz = 2\pi i \; T(i)$$

Ya sabíamos que $T(i)=1$ así que:

$$\boxed{\int_{|z|=2} \frac{Tz}{z-i}\,dz = 2\pi i}$$

4 a A1

Demos coordenadas a $z=(x,y)$

Entonces $2z-3i = (2x, 2y-3)$

$$|(x,y)| > |(2x, 2y-3)| \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{(2x)^2+(2y-3)^2} \Rightarrow$$

[redacted]

1'6

a) $A_1 = \{ z \in \mathbb{C} : \ |z| > |2z - 3i| \}$

Sea $z = x + iy$

$2z - 3i = 2x + 2iy - 3i = 2x + (2y-3)i$.

$|x+iy| > |2x + (2y-3)i|$ Tomando cuadrados:

$|x+iy|^2 > |2x + (2y-3)i|^2 \longleftrightarrow x^2 + y^2 > 4x^2 + 4y^2 + 9 - 12y$

$\longleftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 12y + 9 < 0$

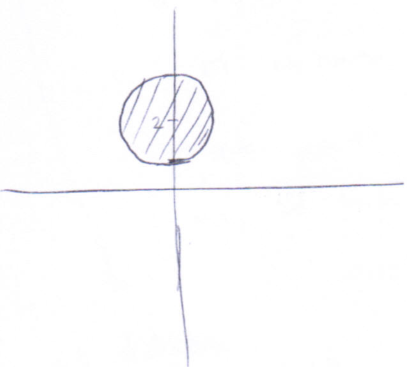
$\longleftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 3 < 0$

$\longleftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 3 < 0 \longleftrightarrow x^2 + (y-2)^2 - 4 + 3 < 0$

$\longleftrightarrow x^2 + (y-2)^2 - 1 < 0 \longleftrightarrow x^2 + (y-2)^2 < 1$.

Circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 1.

$A_1 = \{ (x,y) : \ x^2 + (y-2)^2 < 1 \}$



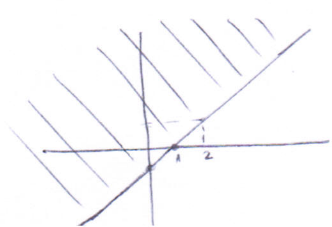
$A_2 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ Re\left[\frac{z-1}{1-i}\right] < 0 \}$. Sea $z = x+iy$

$$\frac{z-1}{1-i} = \frac{z-1}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(z-1)(1+i)}{1-(-1)} = \frac{(z-1)(1+i)}{2} = \frac{(x+iy-1)(1+i)}{2}$$

$$= \frac{((x-1)+iy)(1+i)}{2} = \frac{(x-1) + (x-1)i + yi - y}{2}$$

$$Re\left[\frac{z-1}{1-i}\right] = \frac{(x-1)}{2} - \frac{y}{2} < 0 \longleftrightarrow (x-1) - y < 0 \longleftrightarrow y > x-1.$$

$A_2 = \{ (x,y) : \ y > x-1 \}$.



[redacted] [redacted]

5 b FALSO

0'7

Calculemos los radios de convergencia.

La serie $S_1 = \sum \frac{z^n}{2^n}$ tiene $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Su radio es.

$$R_1 = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{1/2} = 2$$ ✓

La serie $S_2 = \sum \frac{z^{2^n}}{2^n}$ solo tiene b_n no nulos cuando n es potencia de 2 y en esos casos.

$$\forall n = 2^p \quad b_n = \frac{1}{n}$$

✓

$$R_2 = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

No tienen el mismo radio, S_1 tiene radio 2 y S_2 tiene radio 1.

5 c VERDADERO

Si ese límite no fuera infinito o no existiera existiría una región K compacta de $\mathbb{C}$ donde habrían infinitos z_n de la serie. Entonces por ser K acotado los z_n tendrían ahí un punto de acumulación, pero eso es imposible porque al ser f no nula, sus ceros no pueden tener puntos de acumulación.

3 a

Como $f(z)$ converge uniformemente a 0 a lo largo de C_R cuando $R \to \infty$, el lema de Jordan nos permite saber que

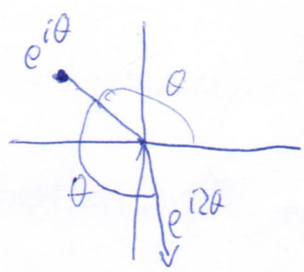
$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$

5 a Verdadero ✓

Un $z = a + ib$ con $a < b$ y $b > 0$ en polares tiene la forma

$z = re^{i\theta}$ con $r > 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Entonces al elevarlo al cuadrado el argumento principal (de $-\pi$ a π) cambia de signo. bien



Por tanto

2) $f(z) = \dfrac{1 - z^2 + 2iz}{1 + z^2} = \dfrac{(1+iz)^2}{1+z^2} = \dfrac{i^2 (z-i)^2}{(z+i)(z-i)}$.

$= \dfrac{i - z}{i + z}$

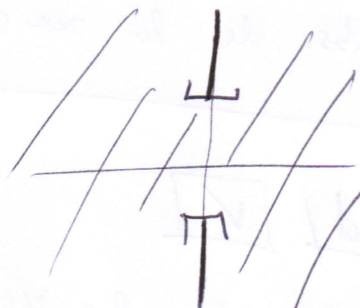
a) De lo anterior sigue que

- $z = i$ es una sing. evitable y $\exists \lim\limits_{z \to i} f(z) = 0$
- $z = -i$ es un polo (de orden 1), ∴

Además, $\mathrm{Res}(f, -i) = \lim\limits_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim\limits_{z \to -i} i - z = 2i$

y $\mathrm{Res}(f, i) = 0$.

b) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus (i[1,\infty) \cup i(\infty, -1])$



∴ Ω_1 es simplemente conexo,

(pues su complementario en $\mathbb{C}^\#$ es conexo).

$\Longrightarrow$ Como $f(z) \neq 0$ en Ω_1 $\Rightarrow$ $\exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ / $e^g = f$.

Por tanto $g(z) \in \log f(z)$.

- $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ <u>NO</u> es S.C y no es esperable que exista un logaritmo holomorfo.

(<u>Dem</u>: Si $\exists\, g \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ / $e^g = f \Rightarrow g' = f'/f = \dfrac{2i}{z^2+1}$

$\Rightarrow \oint_\gamma g' = 0$ por Cauchy. Pero $\displaystyle\int_{\partial D_1(i)} g'(z)\,dz = 2\pi i$ ↯)

$\boxed{\text{Tma Cauchy}}$

c) $f(z) = \dfrac{i-z}{i+z} = \dfrac{i-z}{i} \cdot \dfrac{1}{1-iz}$

$= \dfrac{i-z}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (+iz)^n =$

|z|<1

$= \sum_{n=0}^{\infty} (+i)^n z^n + \underline{\sum_{n=0}^{\infty} iz\,(+i)^n z^n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (+i)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (+i)^{n+1} z^{n+1}$

$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n.$ //

El radio de conv es $R=1$, estando justificadas las operaciones en $|z|<1$ por la conv. unif y abs. de la serie.

5d/ $\boxed{V}$

Dem: Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}}) \Rightarrow g := e^f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$.

Por el Ppio del Módulo Máximo, $|g|$ alcanza el máximo en un pto de $\partial\mathbb{D}$.

Pero $|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$

Como e^x es estrict crec (en $\mathbb{R}$) $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f(z)$ alcanza el max en $\partial\mathbb{D}$.

(NOTA: una idea parecida se usa en el Ejerc 14 ii de la Hoja 4.)