Variable Compleja, 3º Matemáticas/4º PES   Test 2, 6/10/2015

Nomb

7/

1. Considera la función $f(z) = z^5/|z|^4$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$

(a) Demuestra que existen las derivadas parciales de f respecto de x e y en $z = 0$.

(b) Demuestra que f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$.

(c) Justifica si f es o no derivable en $z = 0$.

a) Vemos si existe el límite de la def. de derivada parcial para x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h,0) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/|h|^4 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{|h|^4} = 1$$ ✓

siendo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$
$(x,y) \mapsto f(x+iy)$.

Para la derivada parcial respecto de y.

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{F(0,h) - F(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(ih)^5/|h|^4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{i\,h^4}{|h|^4} = i$$ ✓

Luego existen y $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = i$

b) Si escribimos f como $f(z) = u(z) + iv(z)$ tenemos que

$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$ y equivalentemente para $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$, pudiendo así aprovechar el apartado anterior: $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0\right)$.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ y en este caso en } z=0 \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = -0 \end{cases}$$ ✓

c) Por el apartado b) f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Además f es diferenciable con diferencial $A = I$ luego con estas dos cosas sabemos que es derivable en $z=0$.

$$\lim_{z\to 0} \frac{|f(z) - f(0) - Az|}{|z|} = \lim \frac{|z^5/|z^4| - z|}{|z|} = 0$$

No es derivable pq

∄ parciales ⇏ diferenciable. | $\nexists \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(h) - f(0)}{h}}_{} \to \frac{h^4}{|h|^4} \begin{cases} \xrightarrow{h = t\in\mathbb{R}} 1 \\ \xrightarrow{h = te^{i\theta}} e^{i4\theta} \end{cases}$