

Hoja 1: El plano complejo

1. Encuentra una expresión binomial y/o polar para los siguientes números complejos

(a) $\frac{1}{3+4i}$ (b) $\sqrt{3+4i}$ (c) $(1+i)^4$ (d) $(\sqrt{3}+i)^7$ (e) $(\frac{2+i}{1+i})^2$ (f) $\sum_{n=1}^{100} i^n$

2. Probar que no existe ningún orden total en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Es decir, una operación “ \prec ” con las propiedades

- (i) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ se tenga que $z \prec w$ o bien $w \prec z$ o bien $z = w$
- (ii) si $z_1 \prec z_2$ entonces $z_1 + w \prec z_2 + w, \forall w \in \mathbb{C}$, y $z_1 w \prec z_2 w, \forall w \succ 0$.

Sugerencia: suponer $i \succ 0$ y buscar una contradicción.

3. Demuestra las siguientes propiedades, si $z, w \in \mathbb{C}$.

- (i) $|z + w| \geq ||z| - |w||$
- (ii) $|z + w| = |z| + |w|$ si y sólo si $z = \lambda w$ para algún $\lambda \geq 0$ (o bien $w = 0$)
- (iii) Regla del paralelogramo: $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$
- (iv) utiliza (iii) para hallar $\min_{z \in \mathbb{C}} \{|z - a|^2 + |z - b|^2\}$.

- 4. (i) Demuestra que $\frac{z+w}{z-w}$ es imaginario puro si y sólo si $|z| = |w|$. ¿Cuándo es $\frac{z+w}{z-w} = i$?
- (ii) Demuestra que, si $|a| < 1$, entonces $|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}| \leq 1$ si y sólo si $|z| \leq 1$. ¿Cuándo se tiene igualdad?

Sugerencia: En (i) calcula la parte real de $\frac{z+w}{z-w}$. En (ii) estudia cuándo se tiene $|z - a|^2 \leq |1 - \bar{a}z|^2$.

5. Dibuja los siguientes conjuntos de puntos en el plano complejo

(a) $\Re z = 3$ (b) $\frac{1}{z} = \bar{z}$ (c) $|z| = |z - 1|$ (d) $|z + 4i| + |z - 4i| = 10$ (e) $|z| = \Re z + 1$

6. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, con $b \neq 0$.

(i) Demuestra que $\Im m\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0$ es una recta que pasa por a y tiene la misma dirección que b . Escribe la recta como $Az + B\bar{z} + C = 0$, determinando los valores de A, B, C .

(ii) Escribe la circunferencia $|z - a| = r$ de la forma $z\bar{z} + Az + B\bar{z} + C = 0$, determinando A, B, C .

7. Esboza los siguientes subconjuntos de \mathbb{C} :

(a) $\left\{z : \Im m\left(\frac{z-i}{1+i}\right) > 0\right\}$ (b) $\left\{z : \Re\left(\frac{z}{i}\right) > 1\right\}$ (c) $\{z : |z|^2 + 2\Re(iz) < 1\}$

8. Demuestra que $\pi/4 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ mediante el producto de dos complejos adecuados.

9. (i) Encuentra una fórmula para $\sin(3\theta)$ en términos del $\sin \theta$.

(ii) Demuestra que $\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos(2n - 1)\theta = \frac{\sin(2n\theta)}{2\sin \theta}$.

10. Calcula y dibuja las siguientes raíces complejas $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[3]{-8i}$.

11. Demuestra que si $z \neq 1$ cumple $z^n = 1$, entonces se tiene $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.

Sugerencia: suma la progresión geométrica.

12. Demuestra que si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ entonces para todo $a \in \mathbb{C}$ se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + a) = \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} az_n = \infty$ (si $a \neq 0$).
13. Demuestra que la proyección estereográfica transforma los círculos C de S^2 en círculos de \mathbb{C} (o en rectas si C contiene el polo norte).

Opcionales

14. Demuestra que la distancia cordal en \mathbb{C}^\sharp cumple

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}}, \quad z, w \in \mathbb{C}, \quad \text{y} \quad \chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deduce que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ en \mathbb{C}^\sharp si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(z_n, z) = 0$.

15. (i) Demuestra que la distancia cordal es máxima $\chi(z, w) = 2$ si y sólo si $w = -1/\bar{z}$.
(ii) Comprueba que si $w = -1/\bar{z}$ entonces $|z - w| \geq 2$.
(iii) Demuestra que si $|z - w| \geq 2$, entonces existe algún $a \in \mathbb{C}$ tal que $z - a = -1/\overline{(w - a)}$.
Sugerencia: En (iii), con una rotación y traslación adecuadas puedes suponer $w = 0$ y $z \geq 2$.

16. * Para $z, w \in \mathbb{C}$ fijos, determina los valores máximo y mínimo de $\chi(z - a, w - a)$ cuando $a \in \mathbb{C}^\sharp$.

Sugerencia: Para el máximo, si $|z - w| \geq 2$ utiliza el ejercicio 15; si $|z - w| < 2$, redúcelo al caso $z = R$ y $w = -R$ con $R \in (0, 1)$.

17. * La ecuación de tercer orden $x^3 = 3px + 2q$ tiene como solución real

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}. \quad (\dagger)$$

Obtén justificadamente esta expresión con los siguientes pasos

- (i) Escribe $x = u + v$, y deduce que si $u^3 + v^3 = 2q$ y $uv = p$, entonces x es una solución de la ecuación.
(ii) Eliminando v , y concluye que u^3 debe cumplir la ecuación cuadrática $u^6 + p^3 = 2qu^3$.
(iii) Encuentra una expresión para u^3 , y por simetría, otra expresión para v^3 .
(iv) Puesto que debemos tener $u^3 + v^3 = 2q$, deduce la fórmula (\dagger)
(v) Demuestra que las otras dos soluciones de la ecuación cúbica vienen dadas por

$$x_2 = S_+ \omega_+ + S_- \omega_- \quad \text{y} \quad x_3 = S_+ \omega_- + S_- \omega_+$$

donde $S_\pm = \sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 - p^3}}$ y $\omega_\pm = e^{\pm i2\pi/3}$.

- (vi) Utiliza la fórmula (\dagger) para obtener una solución *real* de $x^3 = 15x + 4$.