

Hoja 2: La derivada compleja

- Utiliza las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que hacen holomorfa a la función $f(x + iy) = 2x + y + i(ax + by)$, y encuentra una expresión para f en términos de z .
- Demuestra que la función definida por $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo \mathbb{C} , y encuentra una expresión para f' .
- Si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, probar la equivalencia de las condiciones siguientes:

- | | |
|-----------------------------|--|
| (a) f es constante; | (b) $\Re(f)$ es constante; |
| (c) \bar{f} es holomorfa; | (d) $ f $ es constante; |
| (e) $ f $ es holomorfa; | (f) $f(\Omega)$ está contenido en una recta o un círculo de \mathbb{C} . |

- Si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(\Omega)$ está contenido en la parábola $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v = u^2\}$, probar que f es necesariamente constante.
- Probar que si $f(z)$ es holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, entonces la función $f^*(z) := f(\bar{z})$ está bien definida y es holomorfa en el semiplano inferior.
- Decimos que una función real $\varphi(x, y)$ es *armónica en* $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}ar(\Omega)$, si es de clase $C^2(\Omega)$ y cumple la EDP

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

- Probar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $\Re f, \Im f \in \mathcal{H}ar(\Omega)$.
- Encuentra dos polinomios $P(x, y), Q(x, y)$ de grado 4, armónicos y linealmente independientes.
- Demuestra que si $f : \Omega \rightarrow \Omega_1$ es holomorfa y $u \in \mathcal{H}ar(\Omega_1)$, entonces $\Delta(u \circ f) = 0$ en Ω .

- Sea $\vec{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ un campo de vectores de clase C^1 en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que

- \vec{V} es *irrotacional* si $\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
- \vec{V} es *incompresible* si $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

- Demuestra que $f(z)$ es holomorfa en Ω si y sólo si $\vec{V}(z) = \overline{f'(z)}$ es irrotacional e incompresible.
- Esboza el campo de vectores asociado a la función holomorfa $f(z) = z^2$.

Sugerencia: para (b) puedes usar el comando `plotdf` de WxMaxima.

- Opcional*** (a) Demuestra que las funciones holomorfas en general no cumplen el teorema del valor medio, es decir no siempre se tiene que $f(\alpha) - f(\beta) = f'(\theta)(\alpha - \beta)$ para algún $\theta \in [\alpha, \beta]$.
 (b) Demuestra que sí se cumple el siguiente sustituto: si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con Ω abierto convexo, entonces

$$f(\alpha) - f(\beta) = (\Re [f'(\theta_1)] + i \Im [f'(\theta_2)])(\alpha - \beta)$$

para ciertos $\theta_1, \theta_2 \in [\alpha, \beta]$.

Sugerencia: en (a) prueba con $f(z) = z^3 + iz^2$. En (b), reduce al caso $\alpha = 1, \beta = 0$, y usa el TVM en \mathbb{R}^2 .

9. Demuestra la siguiente regla de L'Hôpital: si f, g son derivables en z_0 y cumplen $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$ entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

10. Si $P(z)$ es un polinomio de grado n con ceros $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, demuestra que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \alpha_j}.$$

11. Probar que una función racional de orden uno $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es constante si y sólo si $ad - bc = 0$.

12. Considera las transformaciones de Möbius

$$T_1 z = \frac{z + 2}{z + 3}, \quad y \quad T_2 z = \frac{z}{z + 1}.$$

Hallar $T_1 \circ T_2$, $T_2 \circ T_1$ y $T_1^{-1} \circ T_2$.

13. (a) Construye una transformada de Möbius T tal que

$$T(1) = 0, \quad T(i) = 1 \quad y \quad T(-1) = \infty.$$

(b) Demuestra que si $|z| < 1$ entonces $\Im m [T(z)] > 0$ (y viceversa).

(c) Concluye que T es una biyección holomorfa entre el disco unidad $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ y el semiplano superior $\mathbb{H} = \{\Im m z > 0\}$.

(d) Encuentra una expresión para las funciones T' , T^{-1} y $(T^{-1})'$.

14. (a) Demuestra que una transformada de Möbius $Tz = \frac{az + b}{cz + d}$ (distinta de la identidad) tiene a lo sumo dos puntos fijos en \mathbb{C}^\sharp .

(b) Encuentra los puntos fijos cuando T es una traslación, una dilatación y una inversión.

Sugerencia: comprueba que la ecuación $\frac{az+b}{cz+d} = z$ tiene a lo sumo 2 raíces en \mathbb{C}^\sharp (distingue $c = 0$ y $c \neq 0$).

15. Encuentra en cada caso una transformación de Möbius T con la propiedad indicada:

(a) T envía la terna $(2, i, -2)$ en $(1, i, -1)$ (en ese orden).

(b) T envía la terna $(\infty, i, 0)$ en $(0, i, \infty)$ (en ese orden).

(c) T envía la circunferencia unidad $\{|z| = 1\}$ en el eje imaginario $\{\Re e z = 0\}$.

(d) T fija los puntos $z = 0$ y $z = i$.

16. Decimos que una función f definida en $\{|z| > R\}$ es *derivable en $\infty \in \mathbb{C}^\sharp$* si $f^*(w) := f(1/w)$ es derivable en el origen.

(a) Demuestra que f es derivable en ∞ si y sólo si existen

$$f(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \quad y \quad f'(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty)).$$

(b) Calcula la derivada en el ∞ de una transformada de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.